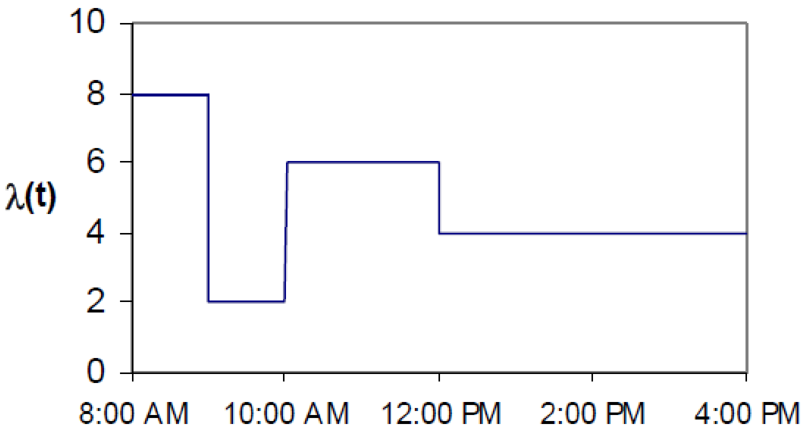
ДОМАЋИ ЗАДАТАК 1 – СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ У ОПЕРАЦИОНИМ ИСТРАЖИВАЊИМА
новембар 2013.

1. Лекар, који има своју ординацију, заказао је два прегледа у понедељак: пацијенту A у $13h$, пацијенту B у $13{:}30$. Дужине трајања прегледа су независне, једнако расподељене случајне величине са експоненцијалном расподелом и очекивањем од $30min$. Претпостави се да су оба пацијента (A и B) стигла на време, за своје прегледе. Израчунати очекивану дужину временског периода (у минутима), који пацијент B проведе у лекарској ординацији.

2. Број позива упућених call-центру $X(t)$ у интервалу $(0,t]$, $t \geq 0$, може се представити као Пуасонов процес са интензитетом 4 позива по сату.
а) Израчунати вероватноћу да је било мање од два позива у току првог сата.
б) Ако је било тачно 6 позива у току прва два сата, израчунати вероватноћу да су тачно два упућена у току првог сата.
в) Претпостави се да call-оператер иде на паузу од $15min$ након што одговори на 10 позива. Одредити просечан ефективни период рада (без пауза) оператера, који има осмочасовно радно време.
Даље, претпостави се да $\frac{3}{4}$ броја позива упућују мушкарци, а остали позиви су од жена.
г) Ако су три мушкарца звала у току једног сата, израчунати вероватноћу да су две жене звале током истог сата.
д) Израчунати вероватноћу да ће у току једног сата бити 5 позива, од чега су тачно три упутиле жене.
ђ) Одредити очекивану количину времена која протекне док тачно три жене не позову call-центар.

3. **а)** Аутобуси стижу до туристичке атракције, која је отворена за посетиоце од $8h$ до $16h$, у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda = 5$ по сату. Претпостави се да постоје два паркинга: Q и O; i-ти аутобус паркира се на паркингу O, ако је i непаран број, односно на пркингу Q ако је i паран број (тј. аутобуси се наизменично усмеравају ка паркинзима Q и O). Нека је $X_Q(t)$, број аутобуса који су се паркирали на паркингу Q до тренутка $t \geq 0$. Испитати да ли је $\{X_Q(t), t \geq 0\}$ Пуасонов процес и детаљно образложити.
б) Сада се претпостави да аутобуси стижу до туристичке атракције у складу са нехомогеним Пуасоновим процесом са функцијом интензитета $\lambda(t)$, приказаном на слици



и да i-тим аутобусом стиже X_i туриста, при чему је просечан број туриста по аутобусу 50. Одредити очекивани број туриста који дођу у обилазак атракције између $9h$ и поднева.

4. Компанија квартално одређује кредитну способност различитих фирми; рејтинзи су, у опадајућем поретку $A, B, C, D(default)$. Историјски подаци подржавају хипотезу да кредитни рејтинг типичне фирме следи ланац Маркова са матрицом:

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha-\alpha^2 & \alpha & \alpha^2 & 0 \\ \alpha & 1-2\alpha-\alpha^2 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1-2\alpha-\alpha^2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где је α параметар.

а) Нацртати припадни граф.

б) Одредити скуп могућих вредности параметра α за које је матрица P, заиста, матрица вероватноћа прелаза за један корак овог ланца Маркова.

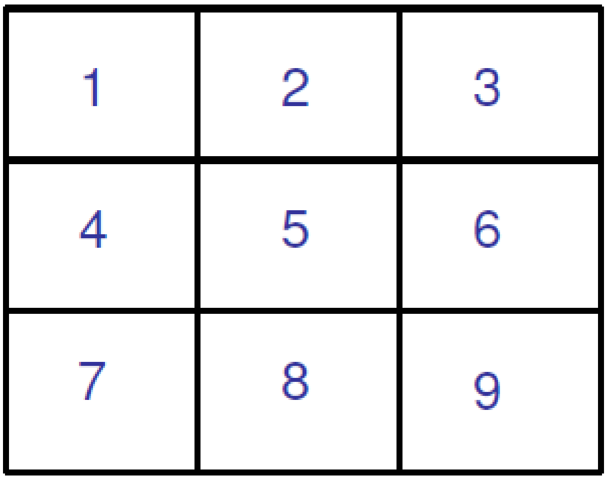
в) Извршити класификацију стања.

г) Одредити стационарну расподелу (ако постоји) и прокоментарисати резултат.

д) Нека је $\alpha = 0.1$. Претпостави се да је подједнако вероватно да фирма у почетном (првом) кварталу има било који од рејтинга A, B, C. Израчунати вероватноће:

- да је рејтинг фирме у трећем кварталу D, ако је у првом био B
- да је рејтинг у трећем кварталу A
- да су рејтинзи у прва три квартала, редом, B, A, C
- да су рејтинзи у трећем, четвртом и петом кварталу, редом, B, B, A

5. Честица случајно лута пољима квадратне мреже, димензије $3x3$, која је приказана на слици, тако што у сваком кораку, на случајан начин и независно од прошлости, из поља у коме се налази прелази у једно од расположивих суседних поља, са једнаком вероватноћом. То значи да честица никада не остаје у истом пољу, нити се креће дијагонално. Моделирати описану ситуацију ланцем Маркова.



а) Претпостави се да је честица, на почетку, позиционирана униформно у једном од девет поља мреже. Израчунати вероватноћу да је честица у централном пољу након три корака.

б) Претпостави се да је честица на почетку у пољу 1. Израчунати вероватноћу да је након једног корака била у пољу 4, ако се зна да се налази у пољу 2 након три корака.

в) Испитати периодичност ланца.

г) Показати да не постоји гранична расподела, при $n \to +\infty$. Испитати да ли постоји стационарна расподела и ако постоји одредити је.

Напомена: За рачунање степена матрице P може се користити R.

<u>БОНУС:</u> Симулирати трајекторију нехомогеног Пуасоновог процеса, који има функцију интензитета $\lambda(t) = \frac{1}{t+a}$, $t \geq 0$, $a > 1$ је константа.

Рок за предају домаћих задатака је: **24.11.2013.**