Издвојене расподеле

У наставку ће бити приказане неке расподеле случајних величина и нека њихова својства.

⋄ Дискретне:

- ***Бернулијева расподела:*** $X \in Ber(p),\ p \in [0,1]$

  закон расподеле: $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, односно

  $$p(x;p) = P\{X = x\} = p^x(1-p)^{1-x},\ x \in \{0,1\}$$

  очекивање: $E(X) = p$

  дисперзија: $D(X) = p(1-p)$

  ⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са Бернулијевом $Ber(p)$ расподелом, онда $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ има биномну $B(n,p)$ расподелу.

- ***Биномна расподела:*** $X \in \mathcal{B}(m,p),\ p \in [0,1],\ m \in \mathbf{N}$

  закон расподеле: $p(x;m,p) = P\{X = x\} = \binom{m}{x} p^x(1-p)^{n-x},\ x \in \{0, ..., m\}$

  очекивање: $E(X) = mp$

  дисперзија: $D(X) = mp(1-p)$

  ⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са биномном $B(m,p)$ расподелом, онда $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ има биномну $B(nm,p)$ расподелу. Због ове особине, каже се да је биномна расподела адитивна по првом параметру.

- ***Геометријска расподела:*** $X \in \mathcal{G}(p),\ p \in [0,1]$

  закон расподеле: $p(x;p) = P\{X = x\} = (1-p)^{x-1}p,\ x \in \mathbf{N}$

  очекивање: $E(X) = \frac{1}{p}$

  дисперзија: $D(X) = \frac{1-p}{p^2}$

  ⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са геометријском $\mathcal{G}(p)$ расподелом, онда $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ има негативну биномну $\mathcal{NB}(n,p)$ расподелу.

- ***Негативна биномна расподела:*** $X \in \mathcal{NB}(m,p),\ p \in [0,1],\ m \in \mathbf{N}$

  закон расподеле: $p(x;m,p) = P\{X = x\} = \binom{x-1}{m-1} p^m(1-p)^{x-m}, x \in \{m, m+1, ...\}$

  очекивање: $E(X) = \frac{m}{p}$

  дисперзија: $D(X) = \frac{m(1-p)}{p^2}$

  ⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са негативном биномном $\mathcal{NB}(m,p)$ расподелом, онда $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ има негативну биномну $\mathcal{NB}(nm,p)$ расподелу. Негативна биномна расподела је адитивна по првом параметру.

- ***Равномерна (дискретна униформна) расподела:*** $X \in \mathcal{DU}(m),\ m \in \mathbf{N}$

закон расподеле: $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \cdots & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$, односно

$$p(x;m) = P\{X = x\} = \frac{1}{m} I\{x \le m\},\ x \in \mathbf{N}$$

очекивање: $E(X) = \frac{m+1}{2}$

дисперзија: $D(X) = \frac{m^2-1}{12}$

- ***Пуасонова расподела:*** $X \in \mathcal{P}(\lambda),\ \lambda > 0$

  закон расподеле: $p(x;\lambda) = P\{X = x\} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},\ x \in \mathbf{N}_0$

  очекивање: $E(X) = \lambda$

  дисперзија: $D(X) = \lambda$

  ⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са Пуасоновом $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелом, онда $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ има Пуасонову $\mathcal{P}(n\lambda)$ расподелу. Дакле, Пуасонова расподела је адитивна по параметру

◇ Непрекидне:

- ***Униформна расподела:*** $X \in \mathcal{U}(a,b),\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b$

  густина расподеле: $f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

  фунција расподеле: $F(x;a,b) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$

  очекивање: $E(X) = \frac{a+b}{2}$

  дисперзија: $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

- ***Експоненцијална расподела:*** $X \in \mathcal{E}(\lambda),\ \lambda > 0$

  густина расподеле: $f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

  фунција расподеле: $F(x;\lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

  очекивање: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

  дисперзија: $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

  ⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са експоненцијалном $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом, онда $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ има гама $\gamma(n,\lambda)$ расподелу.

- ***Гама расподела:*** $X \in \gamma(a,b),\ a > 0,\ b > 0$

  густина расподеле: $f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{x^{a-1} b^a e^{-bx}}{\Gamma(a)}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ где је $\Gamma(a)$ гама функција

  фунција расподеле: $F(x;a,b) = \int\limits_0^x f(t;a,b)dt$

очекивање: $E(X) = \frac{a}{b}$

дисперзија: $D(X) = \frac{a}{b^2}$

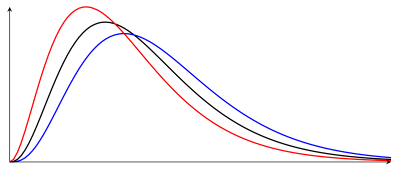
⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са гама $\gamma(a, b)$ расподелом, онда $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ има гама $\gamma(na, b)$ расподелу. Дакле, гама расподела је адитивна по првом параметру

⋆ Ако $X \in \gamma(a, b)$, онда $2bX \in \chi^2_{2a}$.

- ***Хи-квадрат расподела са*** m ***степени слободе:*** $X \in \chi^2_m,\ m \in \mathbb{N}$

густина расподеле:

$$f(x; m) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$



фунција расподеле: $F(x; m) = \int\limits_0^x f(t; m) dt$

очекивање: $E(X) = m$

дисперзија: $D(X) = 2m$

⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са χ^2_m расподелом, онда $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ има χ^2_{nm} расподелу. Дакле, χ^2 расподела има особину адитивности.

⋆ Ако $Y \in \mathcal{N}(0, 1)$, онда $Y^2 \in \chi^2_1$.

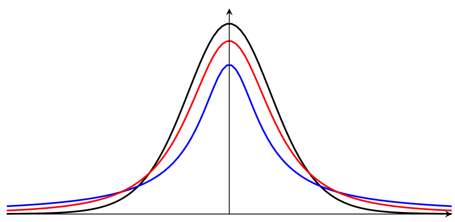
⋆ Ако $X \in \chi^2_m$, онда $X \in \gamma(\frac{m}{2}, \frac{1}{2})$.

- ***Студентова расподела расподела са*** m ***степени слободе:*** $X \in t_m,\ m \in \mathbb{N}$

⋆ Ако су $X_0, X_1, ..., X_m$ независне случајне величине са $\mathcal{N}(0, 1)$ расподелом, онда

$$\frac{X_0}{\sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} X_k^2}{m}}}$$

има Студентову t_m расподелу.



- ***Бета расподела:*** $X \in \beta(a, b),\ a > 0,\ b > 0$

густина расподеле: $f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}, & x \in (0, 1), \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$ где је $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ бета функција

фунција расподеле: $F(x; a, b) = \int\limits_0^x f(t; a, b) dt$

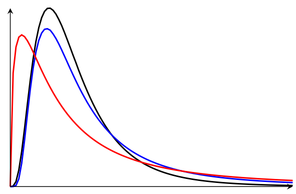
очекивање: $E(X) = \frac{a}{a+b}$

дисперзија: $D(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

⋆ Ако $X \in \beta(a, 1)$, онда $-\ln X \in \mathcal{E}(a)$.

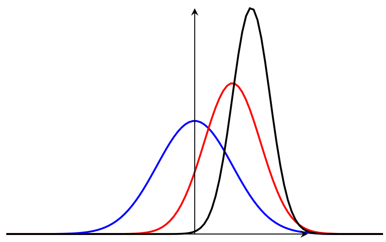
⋆ Ако $X \in \beta(a, b)$, онда $\frac{2bX}{2a(1-X)} \in \mathcal{F}_{2a,2b}$.

- ***Фишерова расподела:*** $X \in \mathcal{F}_{a,b},\ a > 0, b > 0$



⋆ Ако $X \in \mathcal{F}_{a,b}$, онда $\frac{1}{X} \in \mathcal{F}_{b,a}$.
⋆ Ако $Y \in \chi^2_a$ и $Z \in \chi^2_b$ и независне су, онда $\frac{\frac{Y}{a}}{\frac{Z}{b}} \in \mathcal{F}_{a,b}$

- ***Нормална расподела:*** $X \in \mathcal{N}(m, \sigma^2),\ m \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0$



густина расподеле: $f(x; m, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$
фунција расподеле:

$$\Phi(x; m, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{x} f(t; m, \sigma^2) dt$$

очекивање: $E(X) = m$

дисперзија: $D(X) = \sigma^2$

⋆ Ако $X \in \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, онда $\frac{X-m}{\sigma} \in \mathcal{N}(0, 1)$.

⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ расподелом, онда

- $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \in \mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$;
- $\overline{X}_n \in \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$;
- $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k \in \mathcal{N}(m \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, \sigma^2 \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2)$, где су $a_1, ..., a_n$ реални бројеви;
- $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{X_k - m}{\sigma}\right)^2 \in \chi^2_n$.

Напомена: Са $\Phi_0(x)$ ће у наставку бити означена вероватноћа која је приказана у таблицама, односно

$$\Phi_0(x) = \int_0^x f(t; 0, 1) dt = \Phi(x; 0, 1) - \Phi(0; 0, 1) = \Phi(x; 0, 1) - 0.5.$$