ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ, 3Р) - Писмени испит 1. јун 2023.

1. Развој савременог банкарства и привреде повећава изложеност различитим ризицима. Удружење банака Србије процењује да је вероватноћа да се догоди колапс банкарског сектора, ако се последњи догодио пре тачно k година, једнака p_k. Одредити вероватноћу да се догоди тачно један колапс банкарског сектора Србије током n узастопних година које су уследиле непосредно након претходног колапса банкарског сектора.
2. Случајне величине X и Y су независне и имају дискретну униформну $\mathcal{DU}(\{1, 2, \ldots, N\})$ расподелу. Одредити коефицијент корелације случајних величина Z и W, где је $Z = X + Y$, а $W = \min\{X, Y\}$.
3. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[1, 2]$ расподелу, а случајна величина Y при услову да је $X = x$ има униформну $\mathcal{U}[x, x + 1]$ расподелу. Ако је $Z = \frac{Y-1}{X+1}$, одредити расподелу случајне величине Z.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ, 3Р) - Писмени испит 1. јун 2023.

1. Развој савременог банкарства и привреде повећава изложеност различитим ризицима. Удружење банака Србије процењује да је вероватноћа да се догоди колапс банкарског сектора, ако се последњи догодио пре тачно k година, једнака p_k. Одредити вероватноћу да се догоди тачно један колапс банкарског сектора Србије током n узастопних година које су уследиле непосредно након претходног колапса банкарског сектора.
2. Случајне величине X и Y су независне и имају дискретну униформну $\mathcal{DU}(\{1, 2, \ldots, N\})$ расподелу. Одредити коефицијент корелације случајних величина Z и W, где је $Z = X + Y$, а $W = \min\{X, Y\}$.
3. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[1, 2]$ расподелу, а случајна величина Y при услову да је $X = x$ има униформну $\mathcal{U}[x, x + 1]$ расподелу. Ако је $Z = \frac{Y-1}{X+1}$, одредити расподелу случајне величине Z.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ, 3Р) - Писмени испит 1. јун 2023.

1. Развој савременог банкарства и привреде повећава изложеност различитим ризицима. Удружење банака Србије процењује да је вероватноћа да се догоди колапс банкарског сектора, ако се последњи догодио пре тачно k година, једнака p_k. Одредити вероватноћу да се догоди тачно један колапс банкарског сектора Србије током n узастопних година које су уследиле непосредно након претходног колапса банкарског сектора.
2. Случајне величине X и Y су независне и имају дискретну униформну $\mathcal{DU}(\{1, 2, \ldots, N\})$ расподелу. Одредити коефицијент корелације случајних величина Z и W, где је $Z = X + Y$, а $W = \min\{X, Y\}$.
3. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[1, 2]$ расподелу, а случајна величина Y при услову да је $X = x$ има униформну $\mathcal{U}[x, x + 1]$ расподелу. Ако је $Z = \frac{Y-1}{X+1}$, одредити расподелу случајне величине Z.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ, 3Р) - Писмени испит 1. јун 2023.

1. Развој савременог банкарства и привреде повећава изложеност различитим ризицима. Удружење банака Србије процењује да је вероватноћа да се догоди колапс банкарског сектора, ако се последњи догодио пре тачно k година, једнака p_k. Одредити вероватноћу да се догоди тачно један колапс банкарског сектора Србије током n узастопних година које су уследиле непосредно након претходног колапса банкарског сектора.
2. Случајне величине X и Y су независне и имају дискретну униформну $\mathcal{DU}(\{1, 2, \ldots, N\})$ расподелу. Одредити коефицијент корелације случајних величина Z и W, где је $Z = X + Y$, а $W = \min\{X, Y\}$.
3. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[1, 2]$ расподелу, а случајна величина Y при условy да је $X = x$ има униформну $\mathcal{U}[x, x + 1]$ расподелу. Ако је $Z = \frac{Y-1}{X+1}$, одредити расподелу случајне величине Z.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ, 3Р) - Писмени испит 1. јун 2023.

Решења задатака

1. *Први начин*:

   Други начин: Дефинишимо догађај:

   - $A_k = \{$нема колапса банкарског система током k година након што се догодио колапс$\}$.

   Из текста задатка знамо да је $P(A_k|A_{k-1}) = 1 - p_k$ за све $k \geq 2$ и $P(A_1) = 1 - p_1$.

   Ако знамо да се за неко $k \geq 2$ догодио колапс банкарског система у последњих $k-1$ година, тада се тривијално догодио и у последњих k година, па следи

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(A_k|A_{k-1})P(A_{k-1}) + P(A_k|A_{k-1}^c)P(A_{k-1}^c) \\ &= P(A_k|A_{k-1})P(A_{k-1}) \\ &= (1-p_k)P(A_{k-1}). \end{aligned}$$

   Итерирањем ове једнакости добијамо

$$P(A_n) = \prod_{k=1}^{n}(1-p_k).$$

   Због једноставности формула у наставку, израз на десној страни претходне једнакости означимо са π_n, те додефинишимо $\pi_0 = 1$.

   Посматрајмо следеће догађаје:

   - $B_k = \{$први колапс система у периоду од n посматраних година догодио се k-те године$\}$,
   - $C_k = \{$у посматраном периоду од n година није било колапса система након k-те године$\}$.

   Тада је очигледно $P(C_k|B_k) = P(A_{n-k}) = \pi_{n-k}$, док је догађај чија нас вероватноћа занима једнак дисјунктној унији

$$\bigcup_{k=1}^{n}(B_k \cap C_k).$$

   Са друге стране, ако је $k \geq 2$, тада за догађај B_k имамо

$$P(B_k) = P(A_k^c \cap A_{k-1}) = P(A_k^c|A_{k-1})P(A_{k-1}) = p_k\pi_{k-1},$$

   а ова једнакост тривијално важи и за $k = 1$. Закључујемо да је тражена вероватноћа једнака

$$\sum_{k=1}^{n} P(C_k|B_k)P(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \pi_{k-1}p_k\pi_{n-k}.$$

2. Случајна величине $Z = X + Y$ узима вредности $k \in \{2, 3, \ldots, 2N\}$ па разликујемо следеће случајеве:

   - за $2 \leq k \leq N+1$ имамо да је $P\{Z = k\} = \sum_{j=1}^{k-1} P\{X = j\}P\{Y = k-j\} = \frac{k-1}{N^2}$,
   - за $N+2 \leq k \leq 2N$ имамо да је $P\{Z = k\} = \sum_{j=k}^{2N} P\{X = j\}P\{Y = k-j\} = \frac{2N+1-k}{N^2}$.

   тј. закон расподеле случајне величине Z је дат са

$$P\{Z = k\} = \begin{cases} \frac{k-1}{N^2}, & 2 \leq k \leq N+1; \\ \frac{2N+1-k}{N^2}, & N+2 \leq k \leq 2N. \end{cases}$$

   Закон расподеле случајне величине $W = \min\{X, Y\}$ дат је са

$$
\begin{aligned}
P\{W=k\} &= \sum_{j=k}^{N} P\{X=k\}P\{Y=j\} + \sum_{j=k}^{N} P\{Y=k\}P\{X=j\} - P\{Y=k, X=k\} \\
&= 2\sum_{j=k}^{N} P\{X=k\}P\{Y=j\} - \frac{1}{N^2} \\
&= 2\sum_{j=k}^{N} \frac{1}{N}\frac{1}{N} - \frac{1}{N^2} = \frac{2(N+1-k)}{N^2} - \frac{1}{N^2} \\
&= \frac{2N-2k+1}{N^2}, \quad k \in \{1,2,\ldots,N\}.
\end{aligned}
$$

Математичко очекивање случајне величине Z једнако је

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{k=2}^{N+1} k \cdot \frac{k-1}{N^2} + \sum_{k=N+2}^{2N} k \cdot \frac{2N+1-k}{N^2} \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k(k+1) + \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}(k+N+1)(N-k) \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k^2 + \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k - \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1} k^2 + \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1} N(N+1) - \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1} k \\
&= 1 + \frac{1}{N} + \frac{N^2-1}{N} = \frac{N+1+N^2-1}{N^2} = N+1,
\end{aligned}
$$

Напомена: Математичко очекивање случајне величине Z можемо израчунати и без одређивања расподеле. Наиме, случајне величине X и Y су међусобно независне, па важи

$$
E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{N+1}{2} + \frac{N+1}{2} = N+1.
$$

Слично, за дисперзију случајне величине Z имамо

$$
D(Z) = D(X+Y) = D(X) + D(Y) = \frac{N^2-1}{12} + \frac{N^2-1}{12} = \frac{N^2-1}{6}.
$$

Математичко очекивање случајне величине W је

$$
\begin{aligned}
E(W) &= \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{2N-2k+1}{N^2} \\
&= \frac{2N+1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k - \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k^2 \\
&= \frac{2N+1}{N^2}\frac{N(N+1)}{2} - \frac{2}{N^2}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \\
&= \frac{(N+1)(2N+1)}{6N}.
\end{aligned}
$$

Даље имамо да је

$$
\begin{aligned}
E(W^2) &= \sum_{k=1}^{N} k^2 \cdot \frac{2N-2k+1}{N^2} \\
&= \frac{2N+1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k^2 - \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k^3 \\
&= \frac{2N+1}{N^2}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(N+1)(N^2+N+1)}{6N}.
\end{aligned}
$$

па је дисперзија случајне величине W једнака

$$D(W) = E(W^2) - (EW)^2 = \frac{(N-1)(N+1)(2N^2+1)}{36N^2}.$$

Остаје још да одредимо $E(ZW)$. Приметимо да важи

$$ZW = \begin{cases} XY + Y^2, & Y \le X, \\ XY + X^2, & Y > X, \end{cases}$$

односно $ZW = XY + \min\{X^2, Y^2\}$, па је

$$\begin{aligned} E(ZW) &= E(XY + \min\{X^2, Y^2\}) = E(XY) + E(\min\{X^2, Y^2\}) \\ &= E(X)E(Y) + E(\min\{X^2, Y^2\}) = \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 + E(\min\{X^2, Y^2\}), \end{aligned}$$

јер су случајне величине X и Y међусобно независне.

Како је $P\{\min\{X^2, Y^2\} = k^2\} = P\{W = k\}$, то имамо да је

$$\begin{aligned} E(\min\{X^2, Y^2\}) &= \sum_{k=1}^{N} k^2 \frac{2N - 2k + 1}{N^2} \\ &= \frac{2N-1}{N^2} \sum_{k=1}^{N} k^2 - \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^{N} k^3 \\ &= \frac{2N+1}{N^2} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{2}{N^2} \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(N+1)(N^2+N+1)}{6N}. \end{aligned}$$

Коначно, коефицијент корелације случајних величина Z и W једнак је

$$\begin{aligned} \rho_{Z,W} &= \frac{E(ZW) - E(Z)E(W)}{\sqrt{D(Z)}\sqrt{D(W)}} \\ &= \frac{\left(\frac{N+1}{2}\right)^2 + \frac{(N+1)(N^2+N+1)}{6N} - \frac{N(N+1)^2(2N+1)}{6}}{\sqrt{\frac{N^2-1}{6}}\sqrt{\frac{(N-1)(N+1)(2N^2+1)}{36N^2}}} \\ &= \frac{\sqrt{3}N}{\sqrt{4N^2+2}}. \end{aligned}$$

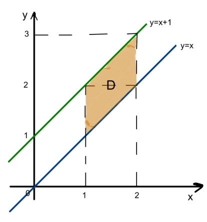
3. Одговарајуће густине расподела случајних величина X и $Y|X = x$:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1,2] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} 1, & y \in [x, x+1] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Густина случајног вектора (X, Y):

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

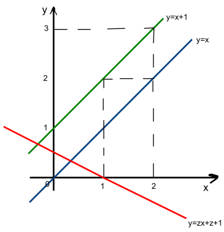
где је $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \, x \in [1,2], \, y \in [x, x+1]\}$.



Даље одређујемо функцију расподеле случајне величине Z:

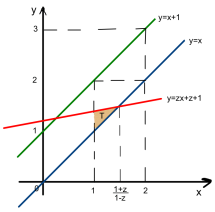
$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\left\{\frac{Y-1}{X+1} \le z\right\} = P\{Y \le zX + z + 1\} = (\star)$$

- $z \le 0$:



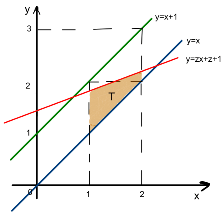
$$(\star) = 0$$

- $0 < z \leq \frac{1}{3}$:



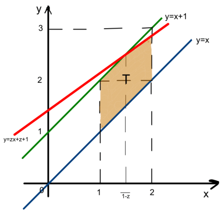
$$(\star) = \int\limits_{1}^{\frac{1+z}{1-z}} \int\limits_{x}^{zx+z+1} \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{1} \, dydx = \frac{1}{2}\frac{(z+1)^2}{1-z} - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}$$

- $\frac{1}{3} < z \leq \frac{1}{2}$:



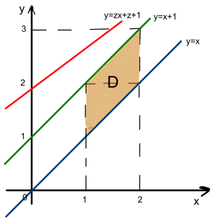
$$(\star) = \int\limits_{1}^{2} \int\limits_{x}^{zx+z+1} dydx = \frac{5}{2}z - \frac{1}{2}$$

- $\frac{1}{2} < z \leq \frac{2}{3}$:



$$(\star) = \int\limits_{1}^{\frac{z}{1-z}} \int\limits_{x}^{x+1} dydx + \int\limits_{\frac{z}{1-z}}^{2} \int\limits_{x}^{zx+z+1} dydx = -\frac{z^2}{2}\frac{1}{1-z} + 4z - 1$$

- $z > \frac{2}{3}$:



$$(\star) = 1$$