



Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ)

31. јануар 2024. године

1. Кутија садржи n куглица од којих је свака или бела или црна. Све претпоставке о броју белих куглица су једнако вероватне. Извлаче се две куглице, једна за другом, без враћања. Ако је прва извучена куглица бела, израчунати вероватноћу да ће друга извучена куглица бити бела.
2. Свака од независних случајних величина X и Y има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу. Ако је

$$Z = \frac{X}{X+Y} \quad \text{и} \quad W_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} I\{[nZ] = k\}, \quad n \in \mathbf{N}, n > 1,$$

израчунати коефицијент корелације случајних величина Z и W_n .

3. За густину расподеле $f_{X,Y}(x,y)$ случајног вектора (X,Y) важи да је

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2} \max\{x,y\}, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Одредити условну густину расподеле случајне величине Y при услову $X < \frac{1}{2}$.

Решења задатака

1. Уочимо да је са

$$H_i = \{\text{у кутији је } i \text{ белих куглица}\}, i = 0, 1, \dots, n$$

дат потпун систем догађаја и да важи $P(H_i) = \frac{1}{n+1}$.

Ако је A : догађај да је прва извучена куглица беле боје и B : догађај да је друга извучена куглица беле боје, треба да одредимо условну вероватноћу $P(B|A)$. Јасно, важи $P(A|H_0) = 0$ и за свако $i = 1, 2, \dots, n$ важи $P(A|H_i) = \frac{i}{n}$. Даље, на основу формуле потпуне вероватноће имамо да је

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=0}^n P(H_i)P(AB|H_i)}{\sum_{i=0}^n P(H_i)P(A|H_i)} = \frac{\frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^n \frac{i}{n} \frac{i-1}{n-1}}{\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n}} \\ &= \frac{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=2}^n i^2 - \sum_{i=2}^n i \right)}{\sum_{i=1}^n i} = \frac{\frac{1}{n-1} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \right]}{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= \frac{2n(n+1)(2n+1-3)}{6(n-1)n(n+1)} = \frac{2(n-1)}{3(n-1)} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

где смо искористили да важи $P(AB|H_0) = P(AB|H_1) = 0$ и да за свако $i = 2, 3, \dots, n$ важи

$$P(AB|H_i) = \frac{i}{n} \frac{i-1}{n-1}.$$

2. Функција расподеле случајне величине Z је дата са

$$\begin{aligned} P \left\{ \frac{X}{X+Y} \leq u \right\} &= P \left\{ X \leq \frac{u}{1-u} Y \right\} = \int_0^\infty \left(\int_0^{uy/(1-u)} \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dx \right) dy \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} \left(1 - e^{-\lambda uy/(1-u)} \right) dy = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} dy - \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y/(1-u)} dy \\ &= 1 - (1-u) = u, \quad u \in (0, 1) \end{aligned}$$

одакле следи да случајна величина Z има униформну $\mathcal{U}(0, 1)$ расподелу, па је $EZ = \frac{1}{2}$ и $DZ = \frac{1}{12}$. Даље,

$$\begin{aligned} EW_n &= E \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} I \{[nZ] = k\} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} P \{[nZ] = k\} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} P \{k \leq nZ < k+1\} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dz = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}, \\ EW_n^2 &= E \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} I \{[nZ] = k\} \right)^2 = E \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} I \{[nZ] = k\} \sum_{j=1}^n \frac{j}{n} I \{[nZ] = j\} \right) \\ &= E \left(\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} I \{[nZ] = k\} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} P \{[nZ] = k\} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}, \end{aligned}$$

па је

$$DW_n = EW_n^2 - (EW_n)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{n^2-1}{12n^2}.$$

Да бисмо израчунали коефицијент корелације, треба још да израчунамо EZW_n . Имамо да је

$$\begin{aligned} EZW_n &= E\left(Z \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} I\{[nZ] = k\}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} E(ZI\{[nZ] = k\}) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \int_0^1 zI\left\{\frac{k}{n} \leq Z < \frac{k+1}{n}\right\} dz = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} z dz \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{1}{2} \left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^3} \sum_{k=1}^n k(2k+1) \\ &= \frac{1}{2n^3} \frac{n(n+1)(4n+5)}{6} = \frac{(n+1)(4n+5)}{12n^2} \end{aligned}$$

Према томе,

$$\rho_{Z,W_n} = \frac{EZW_n - EZEW_n}{\sqrt{DZDW_n}} = \frac{\frac{(n+1)(4n+5)}{12n^2} - \frac{1}{2} \frac{n+1}{2n}}{\sqrt{\frac{1}{12} \frac{n^2-1}{12n^2}}} = \frac{(n+1)(n+5)}{n\sqrt{n^2-1}}.$$

3. Маргинална расподела случајне величине X је дата са

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x,y) dy = \int_0^x \frac{3}{2} x dy + \int_x^1 \frac{3}{2} y dy = \frac{3}{2} \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) \Big|_x^1 = \frac{3}{4}(x^2 + 1),$$

тј.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x^2 + 1), & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Одредимо условну функцију расподеле случајне величине Y при услову $X < \frac{1}{2}$. Важи да је

$$P\{Y \leq y | X < \frac{1}{2}\} = \frac{P\{Y \leq y, X < \frac{1}{2}\}}{P\{X < \frac{1}{2}\}}.$$

Имамо да је

$$P\{X < \frac{1}{2}\} = \int_0^{\frac{1}{2}} f_X(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{4}(x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{4} + \frac{3}{4}x\right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{13}{32}.$$

Сада разликујемо два случаја.

- за $y \in (\frac{1}{2}, 1)$ имамо да је

$$\begin{aligned} P\{Y \leq y, X < \frac{1}{2}\} &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^x \frac{3}{2} x dv + \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^y \frac{3}{2} v dv = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx + \frac{3}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{v^2}{2} \Big|_x^y dx \\ &= \frac{1}{2} x^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} (y^2 - x^2) dx = \frac{1}{16} + \frac{3}{4} \left(y^2 x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{8} y^2 + \frac{1}{32}, \end{aligned}$$

- за $y \in (0, \frac{1}{2})$ имамо да је

$$\begin{aligned} P\{Y \leq y, X < \frac{1}{2}\} &= \int_0^y dv \int_0^v \frac{3}{2} v dx + \int_0^y dv \int_v^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} x dx = \int_0^y \frac{3}{2} v^2 dv + \int_0^y \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} - v^2\right) dv \\ &= \frac{1}{2} y^3 + \frac{3}{16} y - \frac{1}{4} y^3 = \frac{y^3}{4} + \frac{3y}{16}. \end{aligned}$$

Одавде следи да је

$$P\{Y \leq y | X < \frac{1}{2}\} = \begin{cases} \frac{8y^3+6y}{13}, & y \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{12y^2+1}{13}, & y \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Коначно, за условну густину расподеле случајне величине Y при услову $X < \frac{1}{2}$ важи да је

$$f_{Y|X < \frac{1}{2}}(y) = \begin{cases} \frac{24y^2+6}{13}, & y \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{24y}{13}, & y \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$