Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ)

11. јануар 2024. године

---

1. На столу су правилни октаедар, додекаедар и икосаедар. Сваком од њих странице су нумерисане бројевима од 1 до m, где је m број страница које тај полиедар има. На столу су и три новчића за које су вероватноће добијања писма при бацању, редом, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ и 1. Михајло на случајан начин бира новчић са стола, баца га и уочава да ли је добијено писмо или глава. Ако је при бацању новчића добијено писмо, Михајло баца октаедар и икосаедар, а ако је добијена глава, додекаедар и икосаедар. Уколико се, при бацањима тих полиедара, производ добијених бројева завршава цифром нула, он добија један поен, а иначе добија нула поена, и тај број поена записује на папир. Цео поступак понавља 10 пута. Израчунати очекивани број добијених поена, као и очекивани број промена броја који је Михајло записао у односу на претходно записани број.

2. Случајна величина X има нормалну $\mathcal{N}(0,1)$ расподелу. Ако је $Y = X^{2023}$, одредити коефицијент корелације случајних величина X и Y.

3. Случајна величина X има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу. За случајну величину Y при услову $X = x$ важи да је

$$P\{Y = y \mid X = x\} = \frac{\lambda^{y-x}}{(y-x)!}e^{-\lambda}, \quad y \in \{x, x+1, \dots\}.$$

Одредити расподелу случајне величине X при услову $Y = y$.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ) - Писмени испит 11. јануар 2024.

Решења задатака

1. Означимо са A догађај да при једном бацању два правилна полиедра Михајло региструје да се производ палих бројева завршава цифром нула и тако освоји један поен. Дефинишимо следеће догађаје:

   - C_i догађај да је одабрано новчић c_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, за које су вероватноће добијања писма при бацању, редом, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ и 1,
   - Π и Γ догађај да је на новчићу пало писмо или глава, редом.

   Вероватноћу догађаја A можемо одредити користећи потпун систем догађаја:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(C_1\Pi A) + P(C_1\Gamma A) + P(C_2\Pi A) + P(C_2\Gamma A) + P(C_3\Pi A) + P(C_3\Gamma A) \\
&= P(C_1)P(\Pi|C_1)P(A|C_1\Pi) + P(C_1)P(\Gamma|C_1)P(A|C_1\Gamma) \\
&+ P(C_2)P(\Pi|C_2)P(A|C_2\Pi) + P(C_2)P(\Gamma|C_2)P(A|C_2\Gamma) \\
&+ P(C_3)P(\Pi|C_3)P(A|C_3\Pi) + P(C_3)P(\Gamma|C_3)P(A|C_3\Gamma) \\
&= P(A|C_1\Pi)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1\right) + P(A|C_1\Gamma)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot 0\right) \\
&= \frac{2}{3}P(A|C_1\Pi) + \frac{1}{3}P(A|C_1\Gamma).
\end{aligned}$$

   Даље, производ палих бројева се завршава цифром нула ако је производ дељив и са 2 и са 5. Дефинишимо зато нове догађаје:

   - A_1: пао је бар један паран број,
   - A_2: пао је бар један број дељив са 5.

   Одавде следи да је:

$$\begin{aligned}
P(A|C_i\Pi) &= P(A_1 \cap A_2|C_i\Pi) = 1 - P(A_1^c \cup A_2^c|C_i\Pi) = 1 - P(A_1^c|C_i\Pi) - P(A_2^c|C_i\Pi) + P(A_1^c \cap A_2^c|C_i\Pi) \\
&= 1 - \frac{4}{8}\cdot\frac{10}{20} - \frac{7}{8}\cdot\frac{16}{20} + \frac{3}{8}\cdot\frac{8}{20} = \frac{1}{5}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A|C_i\Gamma) &= P(A_1 \cap A_2|C_i\Gamma) = 1 - P(A_1^c \cup A_2^c|C_i\Gamma) = 1 - P(A_1^c|C_i\Gamma) - P(A_2^c|C_i\Gamma) + P(A_1^c \cap A_2^c|C_i\Gamma) \\
&= 1 - \frac{6}{12}\cdot\frac{10}{20} - \frac{10}{12}\cdot\frac{16}{20} + \frac{5}{12}\cdot\frac{8}{20} = \frac{1}{4}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},
\end{aligned}$$

   па је коначно

$$P(A) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{13}{60} \approx 0.21667.$$

   Ако случајна величина X представља број добијених поена у 10 бацања, тада X има Биномну $\mathcal{B}(10, 0.22)$ расподелу, па је очекивани број бонус поена које ће Михајло освојити једнак $10 \cdot 0.22 = 2.2$.

   Нека је Y_i резултат i-тог бацања полиедара, $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Тада $Y_i \in Ber\,(0.22)$ и

$$Y = \sum_{i=1}^{9} |Y_{i+1} - Y_i|$$

   је број промена броја који Михајло записује на папир у односу на претходно записани број. Даље,

$$|Y_{i+1} - Y_i| : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.22^2 + 0.78^2 & 2\cdot 0.22\cdot 0.78 \end{pmatrix}$$

   па је очекивани број промена једнак

$$EY = \sum_{i=1}^{9} E|Y_{i+1} - Y_i| = \sum_{i=1}^{9} 2\cdot 0.22\cdot 0.78 = 3.0888$$

2. По дефиницији, имамо да је коефицијент корелације дат са

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}},$$

одакле због $Y = X^{2023}$ и $X \in \mathcal{N}(0,1)$ добијамо

$$\rho_{XY} = \frac{E(X^{2024}) - E(X)E(X^{2023})}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(X^{2023})}} = \frac{E(X^{2024})}{\sqrt{D(X^{2023})}} = \frac{E(X^{2024})}{\sqrt{E(X^{2\cdot 2023}) - (EX^{2023})^2}}.$$

Одредимо сада n-ти моменат

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Разликујемо два случаја:

- ако је $n = 2k+1$: $E(X^{2k+1}) = 0$, јер је у питању непарна функција и интеграл на полудомену конвергира. Заиста, $\int_0^\infty x^{2k+1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^\infty (2u)^k e^{-u} du = 2^k \Gamma(k+1) < +\infty$.
- ако је $n = 2k$:

$$\begin{aligned} E(X^{2k}) &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \begin{vmatrix} \frac{x^2}{2} = u \\ dx = \frac{du}{\sqrt{2u}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (2u)^k e^{-u} \frac{du}{\sqrt{2u}} \\ &= \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{k-\frac{1}{2}} e^{-u} du \\ &= \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2^k} (2k-1)!! = (2k-1)!!. \end{aligned}$$

Одавде следи да је

$$\rho_{XY} = \frac{E(X^{2024})}{\sqrt{EX^{2\cdot 2023} - (EX^{2023})^2}} = \frac{2023!!}{\sqrt{(2\cdot 2023 - 1)!!}}$$

3. Закон расподеле случајне величине X је дат са

$$P\{X = x\} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},\ x \in \mathbf{N}_0.$$

Закон расподеле случајне величине Y при услову $X = x$:

$$P\{Y = y \,|\, X = x\} = \begin{cases} \frac{\lambda^{y-x} e^{-\lambda}}{(y-x)!}, & y \in \{x, x+1, x+2, \dots\} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Закон расподеле случајног вектора (X, Y):

$$P\{X = x, Y = y\} = P\{X = x\} P\{Y = y \,|\, X = x\} = \begin{cases} \frac{\lambda^y}{x!(y-x)!} e^{-2\lambda}, & x \in \mathbf{N}_0,\ y \in \{x, x+1, x+2, \dots\} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Закон расподеле случајне величине Y за $y \in \mathbf{N}_0$ дат је са

$$\begin{aligned} P\{Y = y\} &= \sum_{x=0}^{\infty} P\{X = x, Y = y\} = \sum_{x=0}^{y} \frac{\lambda^y}{x!(y-x)!} e^{-2\lambda} \\ &= \lambda^y e^{-2\lambda} \sum_{x=0}^{y} \frac{1}{x!(y-x)!} \cdot \frac{y!}{y!} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} \sum_{x=0}^{y} \binom{y}{x} \\ &= \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} \sum_{x=0}^{y} \binom{y}{x} \cdot 1^x \cdot 1^{y-x} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} (1+1)^y \\ &= \frac{(2\lambda)^y e^{-2\lambda}}{y!}. \end{aligned}$$

Дакле, случајна величина Y има Пуасонову $\mathcal{P}(2\lambda)$ расподелу.

Закон расподеле случајне величине X при услову $Y = y$ за $x \in \{0, 1, 2, \dots, y\}$ је

$$\begin{aligned}
P\{X = x \,|\, Y = y\} &= \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{x!(y-x)!} \cdot \frac{y!}{(2\lambda)^y e^{-2\lambda}} \\
&= \frac{y!}{x!(y-x)!} \cdot \frac{\lambda^y}{(2\lambda)^y} = \binom{y}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y \\
&= \binom{y}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{y-x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x.
\end{aligned}$$

Према томе, случајна величина X при услову $Y = y$ има биномну $\mathcal{B}\left(y, \frac{1}{2}\right)$ расподелу.