Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (3Р)

11. јануар 2024. године

---

1. Тамара учествује на турниру преферанса. Турнир је организован на следећи начин: у првом колу се играју три партије и затим се на основу пласмана из првог кола пролази или не пролази у друго коло турнира, при чему се са три победе сигурно пролази у друго коло, са две победе се пролази у друго коло са вероватноћом $\frac{1}{2}$, са једном победом се пролази у друго коло са вероватноћом $\frac{1}{4}$, а без иједне победе се сигурно не пролази у друго коло. Вероватноћа да Тамара победи у једној партији првог кола је p, независно од исхода остале две партије.

   (а) **(5 поена)** Са којом вероватноћом ће се Тамара пласирати у друго коло?

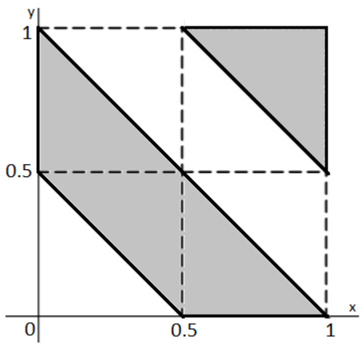
   (б) **(5 поена)** Ако се Тамара није пласирала у друго коло, колико износи вероватноћа да је у првом колу имала 2 победе?

2. Ана баца две правилне коцке за игру. Нека случајна величина X представља број шестица, а случајна величина Y број јединица које су пале.

   (а) **(6 поена)** Одредити расподелу случајног вектора (X, Y), а затим испитати независност случајних величина X и Y.

   (б) **(4 поена)** Одредити коефицијент корелације случајних величина X и Y.

3. Случајни вектор (X, Y) има равномерну расподелу на осенченој области.



   (а) **(4 поена)** Одредити маргиналне расподеле случајних величина X и Y, а затим испитати њихову независност.

   (б) **(6 поена)** Ако је $Z = |X - Y|$, одредити расподелу случајне величине Z.

4. Случајна величина X има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу. Случајна величина Y при услову $X = x$ има расподелу са законом

$$P\{Y = y \,|\, X = x\} = \frac{\lambda^{y-x}}{(y-x)!}e^{-\lambda}, \quad x \in \mathbf{N}_0,\ y = x, x+1, x+2, \ldots$$

   (а) **(7 поена)** Одредити расподелу случајне величине Y.

   (б) **(3 поена)** Одредити расподелу случајне величине X при услову $Y = y$.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (3Р) - Писмени испит 11. јануар 2024.

Решења задатака

1. Дефинишимо следеће догађаје:

- A: Тамара се пласирала у друго кола турнира,
- H_i, $i \in \{0,1,2,3\}$: Тамара је у првом колу остварила i победа,
- 1 и 0 представљају победу односно пораз у појединачној партији.

Тада вреди

$$
\begin{aligned}
P(H_0) &= P(\{0,0,0\}) = (1-p)^3,\\
P(H_1) &= P(\{0,0,1\},\{0,1,0\},\{1,0,0\}) = 3p(1-p)^2,\\
P(H_2) &= P(\{0,1,1\},\{1,0,1\},\{1,1,0\}) = 3p^2(1-p),\\
P(H_3) &= P(\{1,1,1\}) = p^3.
\end{aligned}
$$

Даље, из текста задатка имамо да је

$$P(A|H_0) = 0, \quad P(A|H_1) = \frac{1}{4}, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A|H_3) = 1.$$

(а) $\{H_0, H_1, H_2, H_3\}$ је потпун систем догађаја па користећи формулу потпуне вероватноће добијамо:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{3} P(H_i)P(A|H_i) = \frac{3}{4}p(1-p)^2 + \frac{3}{2}p^2(1-p) + p^3.$$

(б) Користећи Бајесову формулу добијамо:

$$
\begin{aligned}
P(H_2|\bar{A}) &= \frac{P(H_2)P(\bar{A}|H_2)}{P(\bar{A})} = \frac{P(H_2)(1-P(A|H_2))}{1-P(A)}\\
&= \frac{3p^2(1-p)\left(1-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(\frac{3}{4}p(1-p)^2 + \frac{3}{2}p^2(1-p) + p^3\right)}\\
&= \frac{\frac{3}{2}p^2(1-p)}{1-\frac{3}{4}p(1-p)^2 - \frac{3}{2}p^2(1-p) - p^3}\\
&= \frac{6p^2}{p^2+p+4}.
\end{aligned}
$$

2. (а) Одредимо, у сврху илустрације, $P\{X=1, Y=1\}$. Посматрани догађај се догодио једино ако је на првој коцки пала шестица, а на другој јединица, или обрнуто. Зато је,

$$P\{X=1, Y=1\} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

Слично одређујемо и остале комбинације и тако добијамо закон расподеле дводимензионог случајног вектора (X, Y) дат на следећи начин:

X/Y	0	1	2	$P\{X=\cdot\}$
0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{5}{18}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
$P\{Y=\cdot\}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$	1

Одавде одмах добијамо и маргиналне расподеле:

$$X, Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{25}{36} & \frac{5}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Случајне величине X и Y нису независне јер је нпр.

$$P\{X=1\}P\{Y=2\} = \frac{5}{18}\cdot\frac{1}{36} \neq 0 = P\{X=1, Y=2\}.$$

(б) Из дела под (а) добијамо да је $EX = EY = \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$, док је $E(XY) = \frac{1}{18}$, па закључујемо да је $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - EXEY = -\frac{1}{18}$. Са друге стране, $E(X^2) = E(Y^2) = \frac{5}{18} + 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{7}{18}$, па је $DX = DY = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{5}{18}$. Одавде имамо да је трахени коефицијент корелације једнак

$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = -\frac{1}{5}.$$

3. (а) Одредимо прво маргиналну расподелу случајне величине X.

- за $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ имамо да је $f_X(x) = \int_{\frac{1}{2}-x}^{1-x} 2dy = 1$,
- за $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ имамо да је $f_X(x) = \int_0^{1-x} 2dy + \int_{\frac{3}{2}-x}^{1} 2dy = 1$.

Одавде закључујемо да X има униформну $\mathcal{U}(0,1)$ расподелу. Такође, због симетрије, исто важи и за случајну величину Y, тј. $Y \in \mathcal{U}(0,1)$. Приметимо да случајне величине X и Y нису независне, јер је нпр.

$$P\left\{X < \frac{1}{4}, Y < \frac{1}{4}\right\} = 0 \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P\left\{X < \frac{1}{4}\right\} P\left\{Y < \frac{1}{4}\right\}.$$

(б) Нека је $Z = |X - Y|$. Тада је функција расподеле случајне величине Z дата са:

- за $0 < z \leq \frac{1}{2}$ имамо да је

$$F_Z(z) = 2\left(z\sqrt{2}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - z\right)^2\right) = 2\left(-z^2\frac{1}{2} + z\right) = -z^2 + 2z.$$

- за $\frac{1}{2} < z < 1$ имамо да је

$$F_Z(z) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{(1-z)^2}{2}\right) = -z^2 + 2z.$$

Дакле, функција расподеле случајне величине Z је

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ -z^2 + 2z, & z \in (0,1), \\ 1, & z \geq 1. \end{cases}$$

4. (а) Закон расподеле случајне величине X је дат са

$$P\{X = x\} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},\ x \in \mathbf{N}_0.$$

Закон расподеле случајне величине Y при услову $X = x$:

$$P\{Y = y \,|\, X = x\} = \begin{cases} \frac{\lambda^{y-x} e^{-\lambda}}{(y-x)!}, & y \in \{x, x+1, x+2, \dots\} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Закон расподеле случајног вектора (X, Y):

$$P\{X = x, Y = y\} = P\{X = x\}P\{Y = y \,|\, X = x\} = \begin{cases} \frac{\lambda^y}{x!(y-x)!} e^{-2\lambda}, & x \in \mathbf{N}_0,\ y \in \{x, x+1, x+2, \dots\} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Закон расподеле случајне величине Y за $y \in \mathbf{N}_0$ дат је са

$$\begin{aligned} P\{Y = y\} &= \sum_{x=0}^{\infty} P\{X = x, Y = y\} = \sum_{x=0}^{y} \frac{\lambda^y}{x!(y-x)!} e^{-2\lambda} \\ &= \lambda^y e^{-2\lambda} \sum_{x=0}^{y} \frac{1}{x!(y-x)!} \cdot \frac{y!}{y!} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} \sum_{x=0}^{y} \binom{y}{x} \\ &= \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} \sum_{x=0}^{y} \binom{y}{x} \cdot 1^x \cdot 1^{y-x} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} (1+1)^y \\ &= \frac{(2\lambda)^y e^{-2\lambda}}{y!}. \end{aligned}$$

Дакле, случајна величина Y има Пуасонову $\mathcal{P}(2\lambda)$ расподелу.

(б) Закон расподеле случајне величине X при услову $Y = y$ за $x \in \{0, 1, 2, \ldots, y\}$ је

$$\begin{aligned} P\{X = x \,|\, Y = y\} &= \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{x!(y-x)!} \cdot \frac{y!}{(2\lambda)^y e^{-2\lambda}} \\ &= \frac{y!}{x!(y-x)!} \cdot \frac{\lambda^y}{(2\lambda)^y} = \binom{y}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y \\ &= \binom{y}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{y-x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x. \end{aligned}$$

Према томе, случајна величина X при услову $Y = y$ има биномну $\mathcal{B}\left(y, \frac{1}{2}\right)$ расподелу.