Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (3Р)

колоквијум

15. децембар 2023. године

---

1. Да би Михајло започео игру "Човече не љути се" прво мора добити шестицу на коцкици за игру. Одредити скуп елементарних исхода.

   (а) Израчунати вероватноћу да је Михајлу потребно више од три покушаја да први пут добије шестицу.

   (б) Ако при истовременом бацању 6 коцкица за игру падне цифра "1" на бар 5 коцкица, каже се да је добијен јамб јединица. Одредити колико је најмање независних бацања потребно да Михајло изведе да би са вероватноћом не мањом од 0.99 добио јамб јединица.

   (в) Михајло игра бонус рунду у игри "Човече не љути се". Он осваја бонус поен ако се након бацања m идентичних коцкица истовремено производ добијених бројева завршава цифром "0". Након сваког бацања коцкица, Михајло на папиру бележи знак "+" ако је освоји бонус поен и знак "−" иначе. Одредити очекивани број освојених бонус поена и очекивани број промена знакова "+" и "−" у низу од m независних бацања коцкица.

2. (а) Случајна величина X има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу, а случајна величина Y геометријску $\mathcal{G}(p)$ расподелу. Ако су X и Y независне случајне величине, одредити $P\{X \leq Y\}$.

   (б) За случајну величину V важи да је $P\{V = k\} = \frac{1}{2^k}$, за $k \in \mathbb{N}$. Ако је $W = \sin\left(\frac{\pi V}{2}\right)$, одредити математичко очекивање случајне величине W.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (3Р) - Колоквијум 15. децембар 2023.

Решења задатака

1. Скуп елементарних исхода је

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_{n-1} \in \{1,2,3,4,5\},\, x_n = 6,\, n \in \mathbb{N}\} \\ \cup \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in \{1,2,3,4,5\}, \forall i \in \mathbb{N}\}$$

(а) Нека је B догађај да ће Михајлу бити потребно више од три покушаја да први пут добије шестицу и B_n догађај да је потребно тачно n бацања коцкице да се добије шестица. Тада је

$$B_n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 6) : x_k \in \{1,2,3,4,5\}, k = 1, 2, \dots, n-1\},$$

$$B = \bigcup_{n=4}^{\infty} B_n.$$

Како је

$$P(B_n) = \frac{5^{n-1} \cdot 1}{6^n}, \forall n \in \mathbb{N},$$

и догађаји B_n су међусобно дисјунктни следи да је

$$P(B) = P\left(\bigcup_{n=4}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=4}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{5^{n-1} \cdot 1}{6^n} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k \\ = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{125}{216} \approx 0.58.$$

Напомена 1: Нека је X случајна величина која представља број бацања коцкице док се не добије шестица. Јасно, тада је $X \in \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$. Сада је тражена вероватноћа $P\{X > 3\} = 1 - P\{X \leq 3\} = 1 - (P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\})$, тј.

$$P\{X > 3\} = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6}\right) = \frac{125}{216}.$$

(б) Вероватноћа да се добије јамб јединица у једном бацању једнака је збиру вероватноћа да је број палих јединица пет или шест, тј. износи

$$p = \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5 \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{31}{6^6}.$$

Нека је A_i догађај да је у i-том бацању добијен јамб. Вреди да је $P(A_i) = p$, за свако $i \in \mathbb{N}$. Треба одредити вероватноћу догађаја A - да је добијен јамб у бар једном бацању:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Како су догађаји A_i независни, следи

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i) = 1 - (1-p)^n.$$

Дакле, n одређујемо из услова

$$1 - \left(1 - \frac{31}{1296}\right)^n \geq 0.99.$$

Логаритмовањем и решавањем претходне неједнакости добијамо да за n треба узети најмање $n = 190$ бацања.

Напомена 2: Нека је Y случајна величина која представља број бацања коцкица док Михајло не добије јамб јединица. Тада је $Y \in \mathcal{G}(p)$, где је $p = \frac{31}{6^6}$ вероватноћа одређена као у претходном делу. Тражени број бацања n одређујемо из услова:

$$\sum_{k=1}^{n} P\{Y = k\} \geq 0.99,$$

односно

$$\sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^k = p \cdot \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^n \geq 0.99.$$

Одавде као у претходном делу добијамо да је потребно узети најмање $n = 190$ бацања.

(в) Очигледно, производ m палих бројева на коцкицама завршаваће се цифром "0" ако је производ дељив и са 2 и са 5. Дефинишимо догађаје:

- C: производ је дељив и са 2 и са 5,
- D_1: пао је бар један паран број,
- D_2: пала је бар једна петица.

Јасно, тада је $C = D_1 \cap D_2$, па је

$$\begin{aligned} q = P(C) &= 1 - P(D_1^c \cup D_2^c) = 1 - P(D_1^c) - P(D_2^c) + P(D_1^c \cap D_2^c) \\ &= 1 - \frac{3^m}{6^m} - \frac{5^m}{6^m} + \frac{2^m}{6^m} = 1 - \frac{1}{2^m} - \frac{5^m}{6^m} + \frac{1}{3^m} \end{aligned}$$

Ако случајна величина X представља број регистрованих знакова "+" у m бацања, тада X има Биномну $\mathcal{B}(m, q)$ расподелу, па је очекивани број бонус поена које ће Михајло освојити једнак $m \cdot q$. Нека је Y_i индикатор да ли је Михајло у i-тог бацања забележио знак "+" или не, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Тада $Y_i \in Ber\,(q)$ и

$$Y = \sum_{i=1}^{m-1} |Y_{i+1} - Y_i|$$

је број промена регистрованих знакова. Даље,

$$|Y_{i+1} - Y_i| : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1-q)^2 + q^2 & 2q(1-q) \end{pmatrix}$$

па је

$$EY = \sum_{i=1}^{m-1} E|Y_{i+1} - Y_i| = \sum_{i=1}^{m-1} 2q(1-q) = 2(m-1) \cdot q(1-q).$$

2. (а) Уочимо да догађај $\{X \leq Y\}$ можемо представити као дисјунктну унију догађаја

$$\{X \leq Y\} = \{X = 0\} \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{X = m, Y = n\}.$$

Како су случајне величине X и Y међусобно независне, даље добијамо да је

$$\begin{aligned} P\{X \leq Y\} &= P\{X = 0\} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} P\{X = m, Y = n\} = e^{-\lambda} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} P\{X = m\} P\{Y = n\} \\ &= e^{-\lambda} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} (1-p)^{n-1} p = e^{-\lambda} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} (1-p)^{m-1} p \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n \\ &= e^{-\lambda} + \frac{e^{-\lambda}}{1-p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} = e^{-\lambda} + \frac{e^{-\lambda}}{1-p} \left(e^{\lambda(1-p)} - 1 \right) \\ &= e^{-\lambda} + \frac{e^{-\lambda p}}{1-p} - \frac{e^{-\lambda}}{1-p}. \end{aligned}$$

(б) Приметимо да је

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{за } n = 2k, \\ 1, & \text{за } n = 4k+1, \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ -1, & \text{за } n = 4k+3. \end{cases}$$

Закон расподеле за случајну величину W добијамо сумирањем одговарајућих вредности за случајну величину V, тј. имамо да је

$$P\{W=0\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X=2k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3},$$

$$P\{W=1\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X=4k+1\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{8}{15},$$

а преосталу вероватноћу можемо лако добити као

$$P\{W=-1\} = 1 - P\{W=0\} - P\{W=1\} = \frac{2}{15}.$$

Дакле, закон расподеле случајне величине W дат је са

$$W : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{3} & \frac{8}{15} \end{pmatrix}.$$

Сада је математичко очекивање случајне величине W једнако

$$EW = -1\cdot\frac{2}{15} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{8}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$