ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А - Писмени испит 31. јануар 2023.

1. На столу се налазе два ћупа. Први садржи 5 црвених и 2 беле куглице, а други 3 црвене и 4 беле куглице. Лука баца коцкицу за игру све док се не појави број мањи од 3. Ако се број мањи од 3 појави при непарном по реду бацању, тада извлачи 3 куглице из првог ћупа, а ако се број мањи од 3 појави при парном по реду бацању, тада извлачи 3 куглице из другог ћупа. Одредити очекивани број црвених куглица које ће Лука извући.

2. Државна лутрија Србије је пустила у продају наградну игру за коју је познато да има 51.5% добитних листића. Добитак на једном купљеном листићу је независан од добитака на осталим листићима. Колико листића треба купити да би вероватноћа да међу њима има бар 32 добитна листића више него оних који не доносе добитак била најмање 0.99?

3. Дводимензионална случајна величина (X, Y) има униформну расподелу на унутрашњој области троугла T, где је $T = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ x + y \le 1\}$. Нека је α мера угла између y осе и праве која пролази кроз тачке $(0, 1)$ и (X, Y). Одредити функцију расподеле дводимензионалне случајне величине (X, α), као и функције расподела једнодимензионалних случајних величина X и α.

РЕШЕЊА

1. Нека је Y случајна величина која представља редни број бацања коцкице при којем се први пут појавио број мањи од 3 (1 или 2). Тада Y има геометријску $\mathcal{G}(\frac{1}{3})$ расподелу (вероватноћа да у једном бацању падне број мањи од 3 је $\frac{1}{3}$).

   Обележимо са $H_i,\ i \in \{1, 2\}$ догађаје: "3 куглице се извлаче из i-тог ћупа". Приметимо да скуп $\{H_1, H_2\}$ чини потпун систем догађаја, при чему је

$$\begin{aligned}
P(H_1) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\{Y = 2k+1\}\right) \overset{\text{дисј.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} P\{Y = 2k+1\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{(2k+1)-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3}{5} \\
P(H_2) &= 1 - P(H_1) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

   Даље, нека је X случајна величина која представља број извучених црвених куглица. Расподелу случајне величине X, односно одговарајуће вероватноће

$$P(X = j),\ j \in \{0, 1, 2, 3\}$$

   можемо израчунати помоћу формуле потпуне вероватноће

$$P(X = j) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i) \cdot P(X = j | H_i),\ j \in \{0, 1, 2, 3\}$$

   при чему је:

$$\begin{aligned}
P(X = 0 \mid H_1) &= \frac{0}{\binom{7}{3}} = 0 & P(X = 0 \mid H_2) &= \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{35} \\
P(X = 1 \mid H_1) &= \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{7} & P(X = 1 \mid H_2) &= \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{18}{35} \\
P(X = 2 \mid H_1) &= \frac{\binom{5}{2}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{7} & P(X = 2 \mid H_2) &= \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{12}{35} \\
P(X = 3 \mid H_1) &= \frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{2}{7} & P(X = 3 \mid H_2) &= \frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}
\end{aligned}$$

Када добијене вероватноће заменимо у формулу потпуне вероватноће добијамо закон расподеле случајне величине X.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{8}{175} & \frac{51}{175} & \frac{84}{175} & \frac{32}{175} \end{pmatrix}$$

Дакле,

$$EX = \sum_{j=0}^{3} j \cdot P(X=j) = 0 \cdot \frac{8}{175} + 1 \cdot \frac{51}{175} + 2 \cdot \frac{84}{175} + 3 \cdot \frac{32}{175} = \frac{315}{175} = 1.8$$

2. Нека је n број листића које треба купити и нека је $X_i,\ i \in \{1,2,...,n\}$ случајна величина која узима вредност 1 ако је i-ти листић добитни, односно 0 ако i-ти листић није добитни. Све случајне величине X_i имају исти закон расподеле $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$, при чему је $p = 0.515 = \frac{103}{200}$, а $q = 1 - p = \frac{97}{200}$.

   Нека је $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ случајна величина која представља број добитних листића међу n купљених. Тада S_n има биномну $\mathcal{B}(n, \frac{103}{200})$ расподелу при чему је:

$$E(S_n) = np = \frac{103}{200}n,\ D(S_n) = np(1-p) = \frac{9991}{40000}n$$

   Треба одредити n тако да важи:

$$P\{S_n \geq (n - S_n) + 32\} \geq 0.99$$
$$\Rightarrow P\left\{S_n \geq \frac{n+32}{2}\right\} \geq 0.99$$

   Пошто n мора бити бар 32, можемо извршити апроксимацију, а пошто је $np = \frac{103}{200}n \geq 16.48 > 10$ апроксимацију вршимо нормалном $\mathcal{N}(\frac{103}{200}n, \frac{9991}{40000}n)$ расподелом.

$$\begin{aligned}
& P\left\{S_n \geq \frac{n+32}{2}\right\} = 1 - P\left\{S_n < \frac{n+32}{2}\right\} \geq 0.99 \\
\Longrightarrow\ & P\left\{S_n < \frac{n+32}{2}\right\} \leq 0.01 \\
\Longrightarrow\ & P\left\{S_n < \frac{n+32}{2}\right\} = P\left\{0 \leq S_n < \frac{n+32}{2}\right\} \\
& \approx P\left\{-0.5 \leq S_n < \frac{n+32}{2} + 0.5\right\} \\
& = P\left\{\frac{-0.5 - \frac{103}{200}n}{\sqrt{\frac{9991}{40000}n}} \leq \frac{S_n - \frac{103}{200}n}{\sqrt{\frac{9991}{40000}n}} < \frac{\frac{n}{2} + 16.5 - \frac{103}{200}n}{\sqrt{\frac{9991}{40000}n}}\right\} \\
& = \Phi\left(\frac{-3n + 3300}{\sqrt{9991n}}\right) - \Phi\left(\frac{-100 - 103n}{\sqrt{9991n}}\right) \leq 0.01
\end{aligned}$$

   Како је $n \geq 32$:

$$\frac{-100 - 103n}{\sqrt{9991n}} \leq -6.006 \implies \Phi\left(\frac{-100 - 103n}{\sqrt{9991n}}\right) \approx 0$$

   .

   Према томе,

$$\frac{-3n + 3300}{\sqrt{9991n}} \leq \Phi^{-1}(0.01) \approx -2.33$$
$$3n - 2.33\sqrt{9991n} - 3300 \geq 0$$

   Уведимо смену $t = \sqrt{n}$:

$$3t^2 - 2.33\sqrt{9991}t - 3300 \geq 0$$

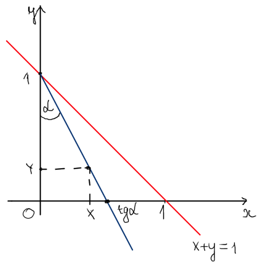
   Решавањем одговарајуће квадратне једначине добијамо:

$$t_{1,2} = \frac{2.33\sqrt{9991} \pm 306.33}{6}$$

$$\Rightarrow t_1 = -12.239 \ \vee \ t_2 = 89.87$$

Даље, $t \leq -12.239$ или $t \geq 89.87$. Како је $t = \sqrt{n} \geq 0$ следи $t \geq 89.87$ односно $n \geq 89.87^2 \approx 8076.6$. Дакле, треба купити најмање 8077 листића.

3. Из текста закључујемо да $(X, Y) \in \mathcal{U}(T)$, односно да је густина дводимензионалне случајне величине

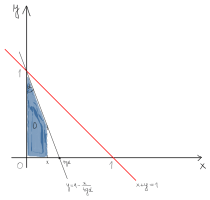


$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m(T)} = 2, & (x,y) \in T \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Приметимо да је $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ са вероватноћом 1, као и да је $X \leq \operatorname{tg}\alpha$. Даље, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{X}{1-Y}$ односно $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{X}{1-Y}$.

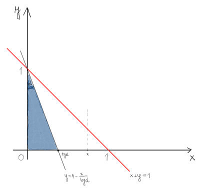
$$\begin{aligned} F(x,\alpha) &= P\{X \leq x, \alpha \leq \alpha\} = P\{X \leq x, \ \operatorname{arctg}\frac{X}{1-Y} \leq \alpha\} \\ &= P\{X \leq x, \ \frac{X}{1-Y} \leq \operatorname{tg}\alpha\} = P\left\{X \leq x, \ Y \leq 1 - \frac{X}{\operatorname{tg}\alpha}\right\} = (\star) \end{aligned}$$

- $x \leq 0$ или $\alpha \leq 0$: $(\star) = 0$
- $0 < x \leq \operatorname{tg}\alpha, \ 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$:



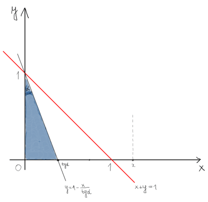
$$(\star) = \iint\limits_D f(u,v)\,dudv = 2P(\text{осенченог дела}) = 2(x - \tfrac{x^2}{2\operatorname{tg}\alpha})$$

- $\operatorname{tg}\alpha < x \leq 1, \ 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$:



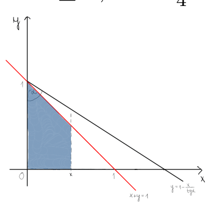
$$(\star) = 2P(\triangle) = 2\tfrac{1\cdot\operatorname{tg}\alpha}{2} = \operatorname{tg}\alpha$$

- $x > 1, \ 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$:



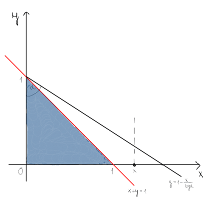
$$(\star) = \operatorname{tg}\alpha$$

- $0 < x \leq 1, \ \alpha > \frac{\pi}{4}$:



$$(\star) = \int\limits_0^x \int\limits_0^{1-u} f(u,v)\,dvdu = 2\int\limits_0^x (1-u)\,du = 2x - x^2$$

- $x > 1, \alpha > 1$:



$$(\star) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1$$

Маргинална функција расподеле случајне величине X:

$$F_X(x) = \lim_{\alpha \to +\infty} F(x, \alpha) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x - x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Маргинална функција расподеле случајне величине α:

$$F_\alpha(\alpha) = \lim_{x \to +\infty} F(x, \alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha \leq 0 \\ \operatorname{tg} \alpha, & 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4} \\ 1, & \alpha > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$