Универзитет у Београду
Математички факултет

ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋА (3В) - колоквијум

13. децембар 2023. године

---

1. (15 поена)

а) Нека је $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ случајних догађаја дефинисаних у простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n^c \cap A_{n+1}\right) < \infty.$$

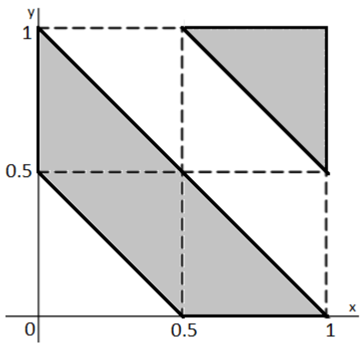
Одредити са којом вероватноћом се реализује бесконачно много чланова низа (A_n).

б) Нека је $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ случајних величина дефинисаних на истом простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. За густину расподеле општег члана низа (X_n) важи да је

$$f_n(x) = \frac{x(1-x)^{n^2-1}}{B(2,n^2)}, \; x \in (0,1),$$

где је $B(a,b)$ Ојлерова бета функција. Ако је $A_n = \left\{X_n \geq \frac{1}{2n}\right\}$, за свако $n \in \mathbb{N}$, доказати да је $P\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\right) = 0$.

2. (15 поена) Случајни вектор (X,Y) има равномерну расподелу на осенченој области.



а) Одредити маргиналне расподеле случајних величина X и Y, а затим испитати њихову независност.

б) Ако је $Z = |X - Y|$, одредити расподелу случајне величине Z.