Универзитет у Београду
Математички факултет

ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋА (3В)

13. јануар 2024. године

---

1. (15 поена)

(а) Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа и нека је A_n низ догађаја из $\mathcal{A}$ такав да је $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P(A_n \triangle A_{n+1}) = 1$. Израчунати $P(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n)$ и $P(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n)$.

(б) Наћи пример простора вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и низа догађаја из σ-алгебре $\mathcal{A}$ за које важи да је $P(A_n) = \frac{13}{2024}$ за $\forall n \in \mathbb{N}$ и $P(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n) = 0$.

2. (15 поена) Нека су X_1 и X_2 независне случајне величине са $\mathcal{E}(1)$ расподелом.

(а) Одредити густину расподеле случајног вектора (Y_1, Y_2), ако је

$$Y_1 = X_1 + \frac{X_2}{2}, \quad Y_2 = X_2.$$

(б) Ако је $Y_3 = \max\{X_1, X_2\}$, доказати да су случајне величине Y_1 и Y_3 једнако расподељене.

3. (15 поена) За густину расподеле $f_{X,Y}(x, y)$ случајног вектора (X, Y) важи да је

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} x^{a-1} y^{b-1} (1-x-y)^{c-1},$$

где је $x, y \in [0, 1]$, $x + y < 1$, $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

(а) Одредити $E(X^n Y^m)$ за све (n, m), где је $n, m \in \mathbb{N}_0$.

(б) Одредити коефицијент корелације случајних величина X и Y.

4. (15 поена) Нека је (X_n) низ независних случајних величина чији општи члан има униформну $\mathcal{U}[2024, 2025]$ расподелу. Ако је

$$Y_n = 2 \ln \left(\prod_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{X_j - 2024}} \right),$$

испитати да ли за низ случајних величина (Y_n) важи закон великих бројева.