Универзитет у Београду
Математички факултет

ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋА (3В)

2. фебруар 2024. године

---

1. (15 поена) Нека случајна величина X има закон расподеле

$$P\{X = n\} = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)},\ n \in \mathbb{N},$$

где је $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, за $s > 1$. Нека је A_k догађај да је X дељиво са p_k, где је $p_1 < p_2 < \dots$ низ свих простих бројев.

(а) Доказати да је $P(A_k) = p_k^{-s}$, за $k \in \mathbb{N}$.

(б) Доказати да су догађаји фамилије $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ потпуно независни.

(в) Доказати да важи једнакост

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - p_k^{-s}) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

2. (15 поена) Нека су X и Y независне случајне величине са истом геометријском $\mathcal{G}(p)$ расподелом. Ако је $U = \min\{X, Y\}$ и $V = X - Y$, испитати независност случајних величина U и V.

3. (15 поена) Случајни вектор (X, Y) има густину расподеле

$$f(x, y) = cx(y - x)e^{-y}, \quad 0 \leq x \leq y < \infty.$$

(а) Одредити константу c.

(б) Одредити $E(X|Y)$ и EX.

4. (15 поена) Општи члан X_n низа независних случајних величина има густину расподеле

$$f(x; m) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \geq 0,\ m \in \mathbb{N},$$

док општи члан Y_n низа независних случајних величина има закон расподеле $P\{Y_n = -2024\} = P\{Y_n = 2024\} = \frac{1}{2}$. Ако су за сваки природан број n случајне величине X_n и Y_n независне, испитати конвергенцију у расподели низа случајних величина (Z_n), где је

$$Z_n = (nm(m+2))^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} X_k Y_k.$$