ТМИ - писмени испит

1. Нека је μ мера на $\sigma-$ алгебри $\mathcal{A}$. Испитати да ли скупови мере нула из $\mathcal{A}$ образују $\sigma-$ алгебру и доказати да је са $A \sim B \Leftrightarrow \mu(A \triangle B) = 0$ дефинисана релација еквиваленције на $\mathcal{A}$.

2. За функцију $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^2\left(\frac{1}{x}\right)}$ испитати припадност простору $L^p(0, \frac{1}{2})$, $p \geqslant 1$.

3. Нека је $(a_n)_{n\geqslant 1}$ низ позитивних бројева такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ и $b > 0$. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty \dfrac{\ln(a_n^2 + x^2) - \ln a_n^2}{b^2 + x^2} \mathrm{d}x$.

4. Доказати да је са $\langle x, y\rangle = \int\limits_0^{+\infty} x(t)\overline{y(t)}e^{-t}\mathrm{d}t$ дефинисан један скаларни производ на $L^2(0, +\infty)$. За функцију $f(t) = \dfrac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{1+t^2}}$ показати да је $\langle f, f\rangle$ коначан. Да ли то значи да f припада $L^2(0, +\infty)$?

ТМИ - писмени испит

1. Нека је μ мера на $\sigma-$ алгебри $\mathcal{A}$. Испитати да ли скупови мере нула из $\mathcal{A}$ образују $\sigma-$ алгебру и доказати да је са $A \sim B \Leftrightarrow \mu(A \triangle B) = 0$ дефинисана релација еквиваленције на $\mathcal{A}$.

2. За функцију $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^2\left(\frac{1}{x}\right)}$ испитати припадност простору $L^p(0, \frac{1}{2})$, $p \geqslant 1$.

3. Нека је $(a_n)_{n\geqslant 1}$ низ позитивних бројева такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ и $b > 0$. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty \dfrac{\ln(a_n^2 + x^2) - \ln a_n^2}{b^2 + x^2} \mathrm{d}x$.

4. Доказати да је са $\langle x, y\rangle = \int\limits_0^{+\infty} x(t)\overline{y(t)}e^{-t}\mathrm{d}t$ дефинисан један скаларни производ на $L^2(0, +\infty)$. За функцију $f(t) = \dfrac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{1+t^2}}$ показати да је $\langle f, f\rangle$ коначан. Да ли то значи да f припада $L^2(0, +\infty)$?

ТМИ - писмени испит

1. Нека је μ мера на $\sigma-$ алгебри $\mathcal{A}$. Испитати да ли скупови мере нула из $\mathcal{A}$ образују $\sigma-$ алгебру и доказати да је са $A \sim B \Leftrightarrow \mu(A \triangle B) = 0$ дефинисана релација еквиваленције на $\mathcal{A}$.

2. За функцију $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^2\left(\frac{1}{x}\right)}$ испитати припадност простору $L^p(0, \frac{1}{2})$, $p \geqslant 1$.

3. Нека је $(a_n)_{n\geqslant 1}$ низ позитивних бројева такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ и $b > 0$. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty \dfrac{\ln(a_n^2 + x^2) - \ln a_n^2}{b^2 + x^2} \mathrm{d}x$.

4. Доказати да је са $\langle x, y\rangle = \int\limits_0^{+\infty} x(t)\overline{y(t)}e^{-t}\mathrm{d}t$ дефинисан један скаларни производ на $L^2(0, +\infty)$. За функцију $f(t) = \dfrac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{1+t^2}}$ показати да је $\langle f, f\rangle$ коначан. Да ли то значи да f припада $L^2(0, +\infty)$?