ТМИ - први колоквијум **23.4.2013.**

1. Наћи меру скупа $A \subset [0,1]$ чији су елементи бројеви који у свом децималном запису садрже број 7.

2. Доказати да функција $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1}, & x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ није $\mathcal{R}-$интеграбилна ни на једном интервалу и израчунати $\int\limits_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}m$.

3. Нека је (X, μ) простор са мером, $f : X \to (0, \infty)$ $\mu-$ мерљива функција и нека је $A_n = \{x \in X \mid n \leqslant f(x) \leqslant n+1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказати да ако $f \in L^1(X)$, тада $\mu(A_n) \to 0$, $n \to \infty$. Показати да обрнуто не важи.

4. Нека је $(f_n)_{n \geqslant 1}$ дефинисан са $f_n(x) = \dfrac{1}{3x^n + 2}$.

а) Доказати да $(f_n)_{n \geqslant 1}$ не конвергира равномерно ни на једном интервалу облика $[0, b]$, за $b > 1$.

б) Доказати да важи $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_0^b f_n(x) \mathrm{d}x = \int\limits_0^b \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) \mathrm{d}x$.

в) Доказати да важи $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_0^\infty f_n(x) \mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) \mathrm{d}x$.

ТМИ - први колоквијум **23.4.2013.**

1. Наћи меру скупа $A \subset [0,1]$ чији су елементи бројеви који у свом децималном запису садрже број 7.

2. Доказати да функција $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1}, & x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ није $\mathcal{R}-$интеграбилна ни на једном интервалу и израчунати $\int\limits_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}m$.

3. Нека је (X, μ) простор са мером, $f : X \to (0, \infty)$ $\mu-$ мерљива функција и нека је $A_n = \{x \in X \mid n \leqslant f(x) \leqslant n+1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказати да ако $f \in L^1(X)$, тада $\mu(A_n) \to 0$, $n \to \infty$. Показати да обрнуто не важи.

4. Нека је $(f_n)_{n \geqslant 1}$ дефинисан са $f_n(x) = \dfrac{1}{3x^n + 2}$.

а) Доказати да $(f_n)_{n \geqslant 1}$ не конвергира равномерно ни на једном интервалу облика $[0, b]$, за $b > 1$.

б) Доказати да важи $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_0^b f_n(x) \mathrm{d}x = \int\limits_0^b \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) \mathrm{d}x$.

в) Доказати да важи $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_0^\infty f_n(x) \mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) \mathrm{d}x$.