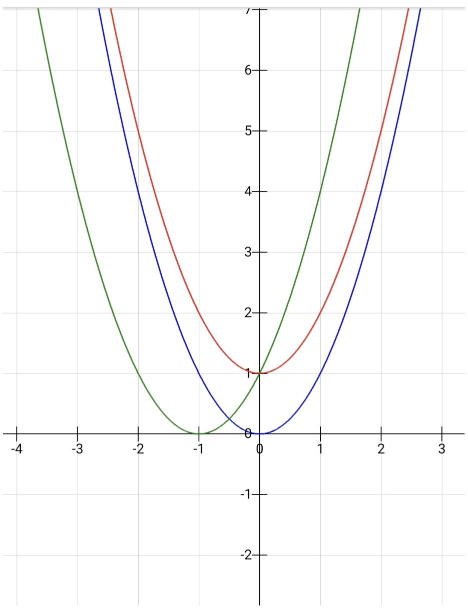
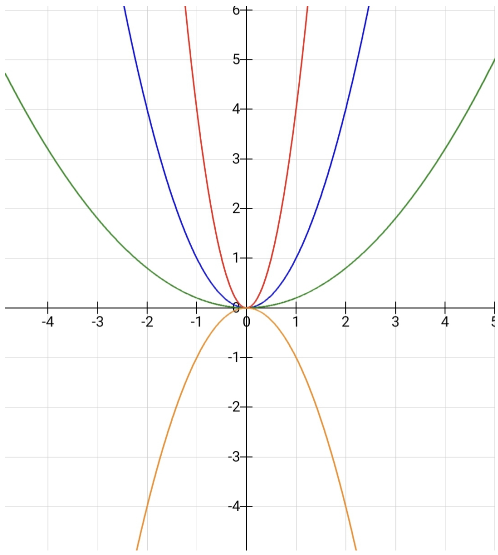
Трансформације графика функције

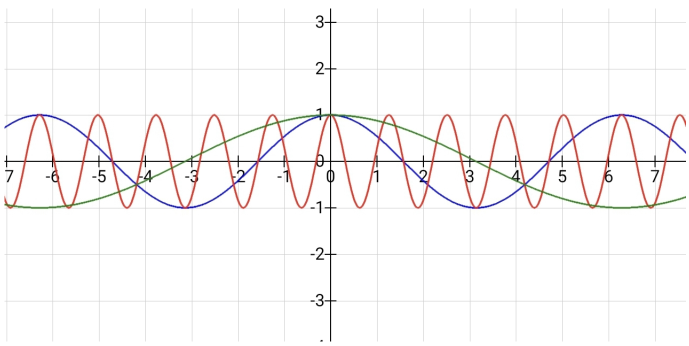
Показаћемо како од графика неке познате функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ лако можемо добити график функција $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ датих са $g(x) = f(x)+c$ и $h(x) = f(x+c)$, где је $c \in \mathbb{R}$ произвољна позитивна константа.
Видимо да у произвољној тачки $x \in \mathbb{R}$ функција g узима вредност за c увећану у односу на вредност коју узима функција f у тој тачки, што значи да је график функције g „подигнут” за вредност c у односу на график функције f па се може нацртати једноставном транслацијом графика функције f дуж y-осе за вредност c.
С друге стране, исту вредност коју функција h узима у тачки $x \in \mathbb{R}$, функција f узима у тачки $x + c$, што значи да функција f „касни” за функцијом h за c (рецимо променљиву x можемо схватити као време које тече, а вредности $f(x)$ и $h(x)$ као положаје где се нека тачка налазила у тренутку x). Зато график функције h можемо добити транслацијом графика функције f у смеру супротном од x-осе за вредност c, што илуструјемо једним примером где је $f(x) = x^2$ (плава), $g(x) = x^2 + 1$ (црвена) и $h(x) = (x + 1)^2$ (зелена). Слично би се радило и у случају $c < 0$, само што би се график функције g добио спуштањем графика функције f за $|c|$, а график функције h померањем удесно графика функције f за $|c|$.



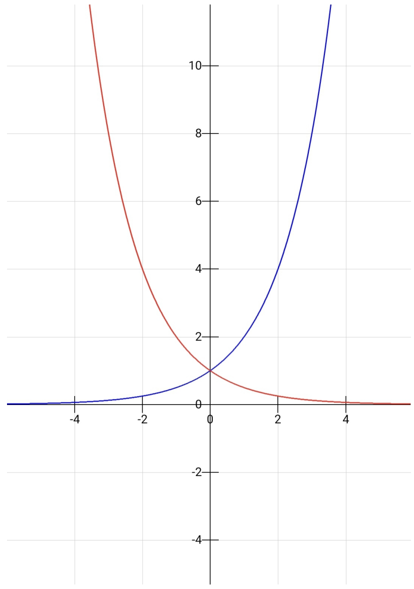
Даље, описаћемо како се добија график функције $g(x) = cf(x)$ од графика функције f, где је $c \in \mathbb{R}$ произвољна константа. Размотримо прво случај када је $c > 0$. Видимо да у произвољној тачки $x \in \mathbb{R}$ функција g узима c пута „већу” вредност у односу на вредност коју функција f узима у тој тачки, па график функције g можемо добити издуживањем ($c > 1$) односно скупљањем ($c < 1$) графика функције f дуж y-осе. За $c = -1$, видимо да функција g у тачки x узима супротну вредност од вредности коју у истој тачки узима функција f, па график функције g можемо скицирати тако што „пресликамо” график функције f у односу на x-осу. Кад је $0 < c \neq -1$, прво пресликамо график функције f у односу на x-осу, а затим тако пресликани график издужимо ($c < -1$) или скупимо ($c > -1$) дуж y-осе. На следећој слици можемо видети графике функција $f(x) = x^2$ (плава боја), $g_1(x) = 4x^2$ (црвена боја), $g_2(x) = \frac{x^2}{5}$ (зелена боја) и $g_3(x) = -x^2$ (наранџаста боја).



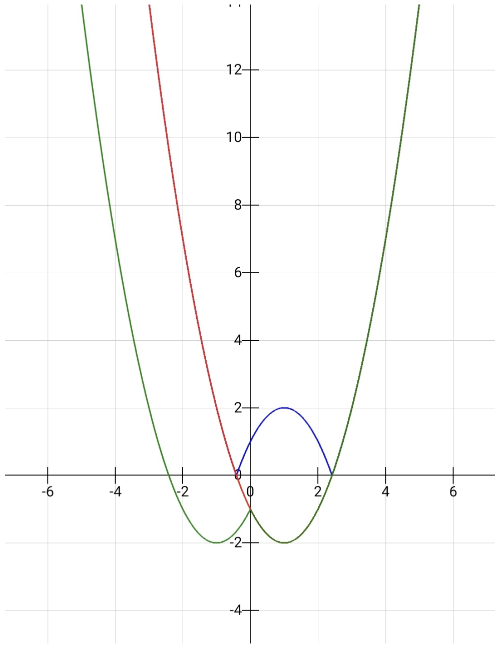
Нека је сада дат график функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а треба скицирати график функције $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дате са $g(x) = f(cx)$ за различите вредности реалне константе c. Прво, нека је $c > 0$. Видимо да у произвољној тачки $x \in \mathbb{R}$ функција g достиже вредност коју је функција f достизала у тачки cx, па се график функције g може добити издуживањем ($c < 1$) односно скупљањем ($c > 1$) графика функције f дуж x-осе. У случају $c = -1$ имамо $g(x) = f(-x)$, па вредност коју функција g узима у тачки x функција f узима у тачки $-x$, што значи да график функције g можемо добити тако што пресликамо график функције f у односу на y-осу. За $0 > c \neq -1$, прво пресликамо график функције f преко x-осе, а затим тако пресликани график издужимо ($c > -1$) или скупимо ($c < -1$) како бисмо добили график функције g. На следећој слици можемо видети графике функција $f(x) = \cos x$ (плава боја), $g_1(x) = \cos 5x$ (црвена боја) и $g_2(x) = \cos \frac{x}{2}$ (зелена боја).



На следећој слици можемо видети графике функција $f(x) = 2^x$ (плава боја) и $g(x) = 2^{-x}$ (црвена боја).



Сада, знајући како изгледа график функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ лако можемо скицирати графике функција g и h датих са $g(x) = |f(x)|$ и $h(x) = f(|x|)$. За оне $x \in \mathbb{R}$ у којима функција f узима ненегативне вредности важи $g(x) = f(x)$, док за преостале x важи $g(x) = -f(x)$, па график функције g можемо добити тако што оне делове графика функције f који су испод x-осе пресликамо преко ње (а делове који су изнад, наравно, не дирамо). Слично, за $x \geqslant 0$ важи $h(x) = f(x)$, док је за $x < 0$ испуњено $h(x) = f(-x)$, па график функције h добијамо тако што део графика функције f са десне стране y-осе не дирамо, а леви део заменимо пресликаним десним преко y-осе. На следећој слици можемо видети како то изгледа када је $f(x) = (x-1)^2-2$ (црвена боја, делимично прекривена плавом и зеленом), $g(x) = |(x-1)^2-2|$ (плава боја, делимично прекривена црвеном и зеленом) и $h(x) = (|x|-1)^2-2$ (зелена боја).



За крај овог одељка, поменућемо да уколико је дат график неке функције f, график њене инверзне функције $g = f^{-1}$ можемо лако скицирати тако што график функције f пресликамо у односу на праву $y = x$, што можемо видети на следећој слици на примеру $f(x) = 3^x$ (зелена боја) и $g(x) = \log_3 x$ (црвена боја).