Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 2 (Р смер) - први колоквијум
10.2.2024.

1. Нека је функција $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, & \text{ако постоји } k \in \mathbb{R} \text{ такав да је } (x_2, y_2) = k(x_1, y_1); \\ |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|, & \text{иначе.} \end{cases}$$

   а) [3] Доказати да је d метрика на $\mathbb{R}^2$.

   б) [5] Скицирати затворене кугле $B[(0,0),1]$, $B[(1,2),2]$ и $B[(1,2),4]$.

   в) [4] Испитати непрекидност пресликавања $f : (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, d_2)$ и $g : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}^2, d)$ која су дата са $f(x) = x$ и $g(x) = x$, при чему је d_2 стандардна еуклидска метрика на $\mathbb{R}^2$.

   г) [4] Нека су низови $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(c_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дефинисани са

$$(a_n, b_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \qquad (c_n, d_n) = \left(1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

   Испитати конвергенцију сваког од њих (у метричком простору $(\mathbb{R}^2, d)$).

2. Нека је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дата са

$$f(x, y) = \begin{cases} |\sin(\pi x)| \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ a, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   а) [2] Наћи константу $a \in \mathbb{R}$ такву да функција f буде непрекидна на $\mathbb{R}^2$.

   б) [8] Испитати у којим тачкама је тако добијена функција диференцијабилна.

3. Дата је функција $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ са $f(x, y, z) = 8x^3 - 18xy + 9y^2 + 32z^2 - 48z$.

   а) [7] Наћи локалне екстремуме функције f.

   б) [7] Наћи слику $f(D)$, где је $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \geqslant 2,\ 0 \leqslant x, y, z \leqslant 1\}$.

4. [10] Наћи запремину тела $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid 2x + 2y + z \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x \leqslant \frac{5}{2},\ x - y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 + z \leqslant 2\}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.