Деф. Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$. Низ ф-ја $\{f_n : A \to \mathbb{R}\}$ (обично или тачка-по-тачка) конвергира ка ф-ји $f : A \to \mathbb{R}$ ако за свако $x \in A$ важи

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

и то означавамо са

$$f_n \to f, \ n \to \infty \text{ на скупу } A.$$

Другим речима,

$$f_n \to f,\ n\to\infty \text{ на } A \iff (\forall x\in A)\, f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \iff$$

$$\iff (\forall x\in A)(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0=n_0(x,\varepsilon))(\forall n\in\mathbb{N})$$

$$n>n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon .$$

Деф. Нека је $A\subseteq\mathbb{R}$. Низ фја $\{f_n:A\to\mathbb{R}\}$ равномерно (униформно) конвергира ка фји $f:A\to\mathbb{R}$ кад $n\to\infty$ ако се за свако $\varepsilon>0$ може наћи $\mathbb{N}\ni n_0=n_0(\varepsilon)$ такво да за све $n>n_0$ и све $x\in A$ важи $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. То означавамо са

$$f_n \rightrightarrows f,\ n\to\infty \text{ на } A .$$

Другим речима,

$$f_n \rightrightarrows f,\ n\to\infty \text{ на } A \iff$$

$$\iff (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0=n_0(\varepsilon))(\forall x\in A)(\forall n\in\mathbb{N})\ n>n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

$\boxed{\text{Т.}}$ $f_n \rightrightarrows f,\ n\to\infty$ на $A \Rightarrow f_n\to f,\ n\to\infty$ на A

$\boxed{\text{Т.}}$ Низ фја $\{f_n:A\to\mathbb{R}\}$ равномерно конвергира ка фји $f:A\to\mathbb{R}$ кад $n\to\infty$ <u>акко</u> важи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|=0 .$$

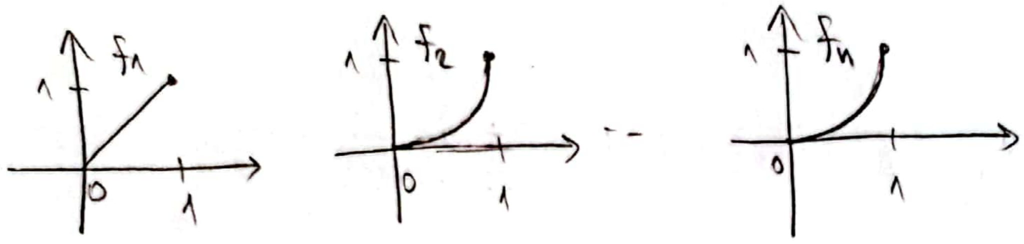
Важи и једна корисна теорема помоћу које можемо доказати да нека фамилија фја не конвергира равномерно.

$\boxed{\text{T.}}$ Ако је $\{f_t : A \to \mathbb{R} \mid t \in T\}$ фамилија непрекидних фја и $f_t \rightrightarrows f$, $t \to t_0$ на A, тада је и фја $f : A \to \mathbb{R}$ такође непрекидна.

Зато, уколико имамо фамилију непрекидних фја $\{f_t : A \to \mathbb{R} \mid t \in T\}$ и $f_t \to f$, $t \to t_0$ на A, где $f : A \to \mathbb{R}$ није непрекидна фја, на основу претходне теореме закључујемо да $f_t \not\rightrightarrows f$, $t \to t_0$ на A, па самим тим ова фамилија не конвергира равномерно.

1. Испитати обичну и равномерну конвергенцију низа функција $f_n(x)=x^n$ на скупу $A=[0,1]$.

$f_1(x)=x,\ f_2(x)=x^2,\ f_3(x)=x^3,\ \dots$

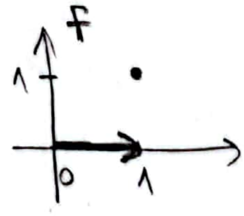


$x\in[0,1]$ фиксирано

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} x^n=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

$\Rightarrow f_n\to f,\ n\to\infty$, где је $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ дата

са $$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ 1, & x=1\end{cases}$$

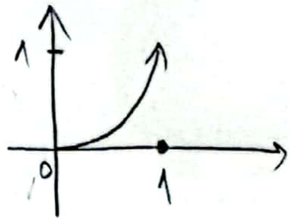


Да ли $f_n\rightrightarrows f,\ n\to\infty$?

<u>I начин:</u> $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=0$?

$$f_n(x)-f(x)=\begin{cases}x^n-0, & x\in[0,1)\\ x^n-1, & x=1\end{cases}=\begin{cases}x^n, & x\in[0,1)\\ 0, & x=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow |f_n(x)-f(x)| = \begin{cases} x^n, & x\in[0,1) \\ 0, & x=1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = \lim_{x\to 1-} x^n = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow f_n \not\rightrightarrows f,\ _{n\to\infty}$$

Дакле, f_n не конвергира равномерно.

<u>II (лакши) начин:</u> Све ф-је f_n су непрекидне, а видимо да f није непрекидна у тачки $x=1$.

$$\overset{\boxed{T.}}{\Longrightarrow} \quad f_n \not\rightrightarrows f,\ n\to\infty$$

2. Испитати обичну и равномерну конвергенцију низа $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ на скупу $A=[0,1]$.

$x\in[0,1]$ фиксирано

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}(x^n - x^{n+1}) = \begin{cases} 0-0, & x\in[0,1) \\ 1-1, & x=1 \end{cases} = 0$$

$$\Rightarrow f_n \to 0,\ n\to\infty \text{ на } [0,1]$$

Да ли $f_n \rightrightarrows 0$, $n \to \infty$ на $[0,1]$?

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = 0 \ ?$$

$$f_n(x) = \underbrace{x^n}_{\geq 0}\underbrace{(1-x)}_{\geq 0} \geq 0$$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)-0| = \sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x)$, што ћемо рачунати помоћу првог извода фје f_n

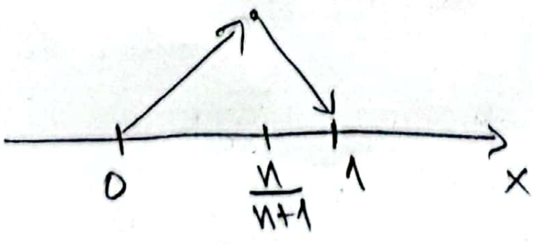
$$f_n'(x) = n x^{n-1} - (n+1)x^n = \underbrace{x^{n-1}}_{\geq 0}\left(n - (n+1)\cdot x\right)$$

$\Rightarrow f_n'(x) \geq 0$ за $x \in \left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ и

$f_n'(x) \leq 0$ за $x \in \left[\frac{n}{n+1}, 1\right]$

$\Rightarrow f_n \nearrow$ на $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ $\qquad f_n(0) = 0$

$f_n \searrow$ на $\left[\frac{n}{n+1}, 1\right]$ $\qquad f_n(1) = 0$



$$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^n}\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-0| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\downarrow 0} \cdot \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}} = 0\cdot\frac{1}{e} = 0$$

$$\Rightarrow f_n \rightrightarrows 0,\ n\to\infty \text{ на } [0,1]$$

3. Испитати равномерну конвергенцију низа

$f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$ на скупу $\mathbb{R}$.

$x\in\mathbb{R}$ произвољно

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

$\Rightarrow f_n \to f,\ n\to\infty$ на $\mathbb{R}$, где је $f(x)=|x|$

Да ли $f_n \rightrightarrows f$, $n\to\infty$ на $\mathbb{R}$?

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad ?$$

$$f_n(x) - f(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - |x| =$$

$$= \left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - |x|\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} + |x|}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} + |x|} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + \frac{1}{n^2} - \cancel{|x|^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} + |x|} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} + |x|} \geq 0$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\underbrace{x^2}_{\geq 0}+\frac{1}{n^2}} + \underbrace{|x|}_{\geq 0}} =$$

за $x=0$ је најмањи именилац

$$= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{0^2+\frac{1}{n^2}} + |0|} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Дакле, $f_n \rightrightarrows f$, $n\to\infty$ на скупу $\mathbb{R}$.

4. Испитати обичну и равномерну конвергенцију низа $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$ на скупу $(0,+\infty)$.

$x \in (0,+\infty)$ произвољно

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(\underbrace{nx}_{\to +\infty}) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow f_n \to f,\ n\to\infty$ на $(0,+\infty)$, где је $f(x) \equiv \frac{\pi}{2}$.

да ли $f_n \rightrightarrows f,\ n\to\infty$ на $(0,+\infty)$?

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = 0 \ ?$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\operatorname{arctg}(nx) - \frac{\pi}{2}\right| = \overbrace{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(nx)}^{g_n(x)},$$ јер $\operatorname{arctg}(nx) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,+\infty)} g_n(x)$$ што рачунамо помоћу првог извода.

$$g_n'(x) = 0 - \frac{1}{1+n^2x^2}\cdot n = -\frac{n}{1+n^2x^2} < 0 \Rightarrow g_n \downarrow \text{ на } (0,+\infty)$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in(0,+\infty)} g_n(x) = \lim_{x\to 0+} g_n(x) = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\underbrace{nx}_{\to 0})\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

$\Rightarrow$ f_n не конвергира равномерно