Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 1 (ток 1О2) - први колоквијум
10.2.2023.

1. а) [1] Дат је скуп $A = [1, 3)$. Одредити $\sup A$.
   б) [1] Нека је скуп B дефинисан са
   $$B = \{5x \mid x \in A\}.$$
   Одредити скуп B и његов супремум.
   в) [3] Нека је γ ненегативан реалан број и нека је скуп $C \subseteq \mathbb{R}$ такав да постоји коначан $\sup C$. Доказати да важи
   $$\sup\{\gamma a \mid a \in C\} = \gamma \sup C.$$
   г) [1] Да ли тврђење под в) важи без претпоставке о ненегативности броја γ?
   д) [3] Испитати монотоност низа $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ задатог са $a_n = \frac{n^2+1}{2n^2+n}$.
   г) [4] Одредити $\sup D$ и $\max D$ (ако постоје), где је
   $$D = \left\{\pi \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \frac{n^2+1}{2n^2+n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

2. а) [3] Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (ако постоји), где је
   $$a_n = \frac{8n^6 - 3n^4 + n^2 - n + 1}{4n^6 + n^5 - n^4 + 2n^2}.$$
   б) [5] Наћи $T = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^{(-1)^n \cdot n}}$.
   в) [5] Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (ако постоји), при чему за свако $n \in \mathbb{N}$ важи
   $$a_n \cdot b_n - \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} = T.$$

3. Нека је $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ дат са $a_1 = a \geqslant 0$ и $a_{n+1} = a_n + 8\sqrt[4]{a_n^3}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.
   а) [3] Испитати конвергенцију овог низа.

   Претпоставимо надаље да је $a > 0$.

   б) [3] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{a_n}}{n}$.
   в) [3] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n$.
   г) [3] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} n^4 a_n \left(2 + \sin^2\frac{2}{a_n} - \sqrt[3]{8 - \frac{9}{a_n^2}}\right)$.
   д) [3] Уколико је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна периодична функција, израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(e^{a_n})}{a_n}$.

4. [9] Нека је функција $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ дата са
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 3\pi x + e^{2x+3} + 1}{x^2 - 2} + a, & x \in (-\infty, -2), \\ \sqrt[3]{x+1} \cdot |x^2 + x|, & x \in [-2, 0], \\ \frac{\cos 3x + e^{x^2} - 2}{\ln(1+5x) \cdot \sin 2x} + b, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$
   Одредити константе $a, b \in \mathbb{R}$ такве да функција f буде непрекидна на $(-\infty, 1]$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.