Деф. Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ и $a_n : A \to \mathbb{R}$ низ фја.

Тада, за $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ кажемо да је <u>функционални</u> <u>ред</u>, док за $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ кажемо да је <u>n-та парцијална сума</u> овог функционалног реда $(n \in \mathbb{N})$.

Област конвергенције функционалног реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ је $\{x \in A \mid \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)}$ конвергира $\}$

за фиксирано $x \in A$ ово је обичан бројевни (нумерички) ред из Анализе 1

Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ конвергира у обичном смислу (или тачка-по-тачка) на скупу A ако његов низ парцијалних сума $s_n(x)$ обично конвергира на скупу A тј. постоји фја $s : A \to \mathbb{R}$ т.д. $s_n \to s$, $n \to \infty$ на A.

Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно (униформно) конвергира на скупу A ако његов низ парцијалних сума $S_n(x)$ равномерно конвергира на скупу A тј. постоји фја $S: A \to \mathbb{R}$ т.д. $S_n \rightrightarrows S$, $n \to \infty$ на скупу A.

Коментар: Ако је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан нумерички ред, можемо га посматрати као функционални ред где је $a_n(x) \equiv a_n$ и он равномерно конвергира на било ком $A \subseteq \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Т.}}$ Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергира на A, тада $a_n \rightrightarrows 0$, $n \to \infty$ на A.

1. Испитати равномерну конвергенцију функ. реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n \quad \text{на } [0,1].$$

$$a_n(x) = (1-x)x^n = x^n - x^{n+1}, \quad a_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$

Испитујемо прво обичну конвергенцију овог функ. реда:

$x \in [0,1]$ фиксирано

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (x^k - x^{k+1}) = (x - \cancel{x^2}) + (\cancel{x^2} - \cancel{x^3}) + (\cancel{x^3} - \cancel{x^4}) + \ldots$$

$$+ \dots \cancel{+} (\cancel{x^{n-1}} - \cancel{x^n}) + (\cancel{x^n} - x^{n+1}) = x - x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x - x^{n+1}) = x - \lim_{n\to\infty} x^{n+1} =$$

$$= \begin{cases} x - 0, & x \in [0,1) \\ x - 1, & x = 1 \end{cases} = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases} =: S(x)$$

$\Rightarrow \quad S_n \to S, \ n \to \infty$ на $[0,1]$

Да ли $S_n \rightrightarrows S, \ n \to \infty$ на $[0,1]$?

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |S_n(x) - S(x)| = 0 \ ?$$

$$S_n(x) - S(x) = x - x^{n+1} - S(x) = \begin{cases} x - x^{n+1} - x, & x \in [0,1) \\ x - x^{n+1} - 0, & x = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x^{n+1}, & x \in [0,1) \\ 1 - 1^{n+1} - 0, & x = 1 \end{cases} = \begin{cases} -x^{n+1}, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

$$|S_n(x)-S(x)| = \begin{cases} x^{n+1}, & x\in[0,1) \\ 0, & x=1 \end{cases}$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |S_n(x)-S(x)| = \lim_{x\to 1-} x^{n+1} = 1^{n+1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |S_n(x)-S(x)| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$ не конвергира равномерно на $[0,1]$

$\boxed{\text{T.}}$ (Вајерштрасов критеријум равномерне конвергенције функционалних редова)

Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ функционални ред. Ако постоји

низ (c_n) реалних бројева такав да

1) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in A)\ n > n_0 \Rightarrow |a_n(x)| \leq c_n$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира ;

тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергира на A.

7. а) Збир два равномерно конвергентна функ. реда је равномерно конвергентан функ. ред.

б) Збир једног равномерно конвергентног функ. реда и једног функ. реда који није равномерно конвергентан (на истом скупу) није равномерно конвергентан функ. ред.

4. Испитати равномерну конвергенцију функ. реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ на сегменту $[-l, l]$, где је $l>0$.

Видимо да је $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Видимо да је други ред конвергентан бројевни ред (по Лајбницовом критеријуму), па је самим тим и равномерно конвергентан функ. ред (општи члан му је константна фја), па треба још да испитамо равномерну конвергенцију првог функ. реда.

$a_n(x) = (-1)^n \frac{x^2}{n^2}$

Приметимо да је $|a_n(x)| = \frac{|x|^2}{n^2} \leq \frac{l^2}{n^2}$ за $x \in [-l, l]$, а ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^2}{n^2}$ конвергира, па по Вајерштрасовом критеријуму $\left(c_n = \frac{l^2}{n^2}\right)$ закључујемо да функ. ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{n^2}$ равномерно конвергира на $[-l, l]$

По претходној теореми закључујемо да је дати функ. ред равномерно конвергентан на $[-l,l]$ (као збир два таква).

<u>Коментар:</u> Нисмо могли да применимо Вајерштрасов критеријум на почетни ред, јер бисмо имали

$$\left|(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}\right| = \frac{x^2+n}{n^2} \le \frac{l^2+n}{n^2} = \frac{l^2}{n^2}+\frac{1}{n},$$

али ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{l^2}{n^2}+\frac{1}{n}\right)$ није конвергентан бројевни ред, јер је збир једног конвергентног $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{l^2}{n^2}\right)$ и једног дивергентног $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)$.

5. Испитати равномерну конвергенцију функц. реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$ на $\mathbb{R}$.

$a_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a_n(x) = \frac{x^2}{1+n^2x^2}$

За све $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ имамо $|a_n(x)| = \frac{x^2}{\underbrace{1}_{>0}+n^2x^2} < \frac{x^2}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2} =: c_n$

и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ K

$\therefore$ Вајерштрас $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конв. на $\mathbb{R}$