Функционални низови и редови

Обична и равномерна конвергенција функционалних низова

<u>Деф.</u> Нека је $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа $T \subseteq \mathbb{R}$ и нека је $A \subseteq \mathbb{R}$. Фамилија фја $\{f_t : A \to \mathbb{R} \mid t \in T\}$ <u>конвергира</u> фји $f : A \to \mathbb{R}$ кад $t \to t_0$ ако за свако $x \in A$ важи

$$f(x) = \lim_{t \to t_0} f_t(x)$$

и то означавамо са

$$f_t \to f,\ t \to t_0 \text{ на скупу } A.$$

Другим речима,

$$f_t \to f,\ t \to t_0 \text{ на } A \iff (\forall x \in A)\ f(x) = \lim_{t \to t_0} f_t(x) \iff$$

$$\iff (\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists U_{t_0} = U_{t_0}(x, \varepsilon))(\forall t \in T)$$

$$t \in U_{t_0} \setminus \{t_0\} \Rightarrow |f_t(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Ако ово важи, кажемо и да фамилија фја f_t <u>обично конвергира</u> или <u>конвергира тачка-по-тачка</u>

(т.п.т.) ка ф-ји f кад $t \to t_0$ на A.

Обичну конвергенцију фамилије ф-ја f_t испитујемо тако што фиксирамо $x \in A$ и одређујемо $\lim\limits_{t \to t_0} f_t(x)$ као у Анализи 1, јер је $f_t(x)$ ф-ја једне променљиве за фиксирано x (зависи само од t).

<u>Деф.</u> Нека је $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа $T \subseteq \mathbb{R}$ и нека је $A \subseteq \mathbb{R}$. Фамилија функција $\{f_t : A \to \mathbb{R} \mid t \in T\}$ <u>равномерно (униформно) конвергира</u> ка функцији $f : A \to \mathbb{R}$ ако се за свако $\varepsilon > 0$ може наћи околина $U_{t_0} = U_{t_0}(\varepsilon)$ тачке t_0 таква да за све $t \in U_{t_0} \setminus \{t_0\}$ и све $x \in A$ важи $|f_t(x) - f(x)| < \varepsilon$.
То означавамо са

$$f_t \rightrightarrows f, \quad t \to t_0 \quad \text{на скупу } A.$$

Другим речима,

$f_t \rightrightarrows f$, $t\to t_0$ на A $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists U_{t_0}=U_{t_0}(\varepsilon))(\forall x\in A)(\forall t\in T)$$

$$t\in U_{t_0}\setminus\{t_0\} \Rightarrow |f_t(x)-f(x)|<\varepsilon$$

$\boxed{\text{Т.}}$ Равномерна конвергенција повлачи обичну

тј. $(f_t \rightrightarrows f,\ t\to t_0 \text{ на } A) \Rightarrow (f_t\to f,\ t\to t_0 \text{ на } A)$.

Ову теорему ћемо користити у задацима где треба испитати да ли нека фамилија фја равномерно конвергира тако што прво одредимо фју ка којој та фамилија обично конвергира. По тврђењу теореме добијена фја је једини кандидат ка коме дата фамилија може равномерно конвергирати (јер ако конвергира равномерно, конвергира и обично).

$\boxed{\text{Т.}}$ Фамилија фја $\{f_t: A\to\mathbb{R} \mid t\in T\}$ равномерно конвергира ка фји $f: A\to\mathbb{R}$ кад $t\to t_0$

ако важи

$$\lim_{t \to t_0} \underbrace{\sup_{x \in A} |f_t(x) - f(x)|}_{} = 0$$

кад рачунамо овај sup, индекс t је фиксиран док x „шета" читавим скупом A, па потом пуштамо $\lim_{t \to t_0}$

Важан специјалан случај је кад је $T = \mathbb{N}$ и $t_0 = +\infty$. Тада имамо низ функција $\{f_n : A \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ и следеће верзије претходних дефиниција:

<u>Деф.</u> Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$. Низ фја $\{f_n : A \to \mathbb{R}\}$ (обично или тачка-по-тачка) конвергира ка фји $f : A \to \mathbb{R}$ ако за свако $x \in A$ важи

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

и то означавамо са

$$f_n \to f, \ n \to \infty \text{ на скупу } A.$$

Другим речима,

$f_n \to f,\ n\to\infty$ на $A \iff (\forall x\in A)\ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \iff$

$\iff (\forall x\in A)(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0=n_0(x,\varepsilon))(\forall n\in\mathbb{N})$

$$n>n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon .$$

<u>Деф.</u> Нека је $A\subseteq\mathbb{R}$. Низ фја $\{f_n: A\to\mathbb{R}\}$ равномерно (униформно) конвергира ка фји $f: A\to\mathbb{R}$ кад $n\to\infty$ ако се за свако $\varepsilon>0$ може наћи $\mathbb{N}\ni n_0=n_0(\varepsilon)$ такво да за све $n>n_0$ и све $x\in A$ важи $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. То означавамо са

$$f_n \rightrightarrows f,\ n\to\infty \text{ на } A .$$

Другим речима,

$f_n \rightrightarrows f,\ n\to\infty$ на $A \iff$

$\iff (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0=n_0(\varepsilon))(\forall x\in A)(\forall n\in\mathbb{N})\ n>n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

$\boxed{\text{Т.}}$ $f_n \rightrightarrows f,\ n\to\infty$ на $A \Rightarrow f_n\to f,\ n\to\infty$ на A

$\boxed{\text{Т.}}$ Низ фја $\{f_n: A\to\mathbb{R}\}$ равномерно конвергира ка фји $f: A\to\mathbb{R}$ кад $n\to\infty$ <u>акко</u> важи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|=0 .$$

Важи и једна корисна теорема помоћу које можемо доказати да нека фамилија фја не конвергира равномерно.

$\boxed{T.}$ Ако је $\{f_t : A \to \mathbb{R} \mid t \in T\}$ фамилија непрекидних фја и $f_t \rightrightarrows f,\ t \to t_0$ на A, тада је и фја $f : A \to \mathbb{R}$ такође непрекидна.

Зато, уколико имамо фамилију непрекидних фја $\{f_t : A \to \mathbb{R} \mid t \in T\}$ и $f_t \to f,\ t \to t_0$ на A, где $f : A \to \mathbb{R}$ није непрекидна фја, на основу претходне теореме закључујемо да $f_t \not\rightrightarrows f,\ t \to t_0$ на A, па самим тим ова фамилија не конвергира равномерно.