Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 1 (ток 1О2) - други колоквијум
30.5.2023.

1. Дата је функција $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{|x-5|}e^{\frac{1}{x+2}}$.

   а) [3] Одредити константе $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ такве да је $f(x) = a_1x + b_1 + \frac{c_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),\ x \to +\infty$ и $f(x) = a_2x + b_2 + \frac{c_2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),\ x \to -\infty$.

   б) [11] Испитати ток и скицирати график функције f.

   в) [2] У зависности од реалног параметра α наћи број решења једначине $f(x) = \alpha$.

2. [13] Израчунати интеграл

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{|\sin 2x|}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,dx.$$

3. а) [9] Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ за $a_n = (-1)^n\left(\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \ln\dfrac{2n+5}{2n+3}\right)$.

   б) [4] Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$, где је низ $b_n = \operatorname{arctg}\left(\sin\left(\dfrac{n+23}{2n+2023}\right)\right)$, а a_n је низ из претходног дела задатка.

4. [8] Нека је $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да је $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2023}$. Доказати да постоји $c \in (0,1)$ такво да је $f(c) = \dfrac{1-c^{2023}}{1-c}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.