Увод у комплексну анализу - писмени испит **9.2.2013.**

1. а) Представити скуп $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| + |z+i| = 4\}$ у комплексној равни.

б) Нека је $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитичка за $|z| \leqslant 3$. Израчунати $\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x - \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$, где је C крива из дела a).

Решење: Једначина у делу а) каже да је збир растојања од две фиксиране тачке i и $-i$ (зване жиже) константан. Дакле, то је елипса. Када се стави да је $z = x + iy$ и, између осталог, два пута квадрира, добије се једначина $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$. У делу б) треба применити Гринову формулу. Добије се да је $\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x - \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathrm{Int}C}(u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Како је f аналитичка, то је њен реални део хармонијска функција, па је $u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0$.

2. Одредити бар једно $1-1$ аналитичко пресликавање којим се област $D = \{z \,\big|\, |z-2i| > 2,\, |z+2i| > 2,\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$ пресликава на јединични диск.

Решење: Једно од могућих решења (могла је да се користи и функција Жуковског, након корака 4. се њоме може прећи на горњу полураван, а онда знамо како на диск):

1. Применити пресликавање $z \mapsto \frac{1}{z}$ (јесте $1-1$ и аналитичко). Добије се $\{z|\frac{1}{4} < \Im z < \frac{1}{4}, \Re z > 0\}$, тј. хоризонтална полутрака (десна половина).
2. Применити пресликавање $z \mapsto z + \frac{i}{4}$ (јесте $1-1$ и аналитичко). Добије се $\{z|0 < \Im z < \frac{1}{2}, \Re z > 0\}$.
3. Применити пресликавање $z \mapsto 2\pi z$ (јесте $1-1$ и аналитичко). Добије се $\{z|0 < \Im z < \pi i, \Re z > 0\}$.
4. Применити пресликавање $z \mapsto e^z$ (јесте $1-1$ и аналитичко овде). Добије се "излазеће" сунце.
5. Применити пресликавање $z \mapsto \frac{1}{z}$ (јесте $1-1$ и аналитичко). Добије се доња половина јединичног диска.
6. Применити пресликавање $z \mapsto e^{i\pi}z$ (јесте $1-1$ и аналитичко). Добије се горња половина јединичног диска.
7. Применити пресликавање $z \mapsto z^2$ (јесте $1-1$ и аналитичко овде). Добије се цео диск.

3. а) Нека је f аналитичка за $z \neq 0$ и "парна", тј. $f(z) = f(-z)$. Доказати да су сви непарни коефицијенти у Лорановом развоју функције f у околини нуле једнаки нули.

б) Доказати да је $I_n = \int\limits_{C_n} \frac{1}{z^3 \sin z}\mathrm{d}z = \frac{4i}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^3}$, $n \geqslant 1$, где је C_n кружница са центром у координатном почетку полупречника $r_n = (n + \frac{1}{2})\pi$.

Решење: Из услова задатка видимо да можемо развити функцију f у Лоранов ред за $|z| > 0$. Дакле, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Али, онда је $f(-z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(-1)^n z^n$. Како важи да је $f(z) = f(-z)$, добијамо да је $a_{2k} = a_{2k}$ и $a_{2k+1} = -a_{2k+1}$, па мора бити да су сви непарни коефицијенти нула. Део под а) се може лепо искористити у другом делу задатка, јер функција $\frac{1}{z^3 \sin z}$ задовољава услов "парности". (НАПОМЕНА: Ово није права парност функција, јер се о томе не може говорити за комплексне функције. Дакле, мора се проверити да ли $\frac{1}{z^3 \sin z}$ заиста задовољава овај услов преласком на e^{iz},...). Даље, тражени интеграл једнак је, као и обично,"$2\pi i$ пута сума резидума", али због дела под а) знамо да је резидум у нули једнак 0 (јер је резидум коефицијент a_{-1}, тј. непаран је). Остају још нуле синуса као сингуларитети, а то већ знамо да су тачке облика $k\pi$. Само још треба видети које леже унутар задате контуре. То су $k\pi$ за $-n \leqslant k \leqslant n$ и $k \neq 0$. Добије се да је резидум у тачки $k\pi$ једнак $\frac{(-1)^k}{k^3\pi^3}$. Просумирамо и то је то.

4. Применом Кошијевог рачуна остатака израчунати интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\sin(\pi x)}{x^2 - 2x + 5}\mathrm{d}x$.

Решење:

5. Нека је $A(z) = \begin{bmatrix} z^3 & z & \frac{1}{18} \\ -3 & z^6 & z^2 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$. За колико различитих z, $|z| < 1$ матрица $A(z)$ није инвертибилна?

Решење: Матрица над пољем $\mathbb{C}$ је инвертибилна акко је њена детерминанта различита од нуле. Дакле, треба одредити број различитих нула једначине $z^9 - 6z^5 + 3z - 1 = 0$ унутар јединичног диска. Ставимо да је $f = -6z^5$ и $g = z^9 + 3z - 1$. Онда за $|z| = 1$ важи $|f| = 6$, $|g| \leqslant 5$, тј. $|f| > |g|$. На основу Рушеове теореме закључујемо да $z^9 - 6z^5 + 3z - 1 = f + g$ има исти број као и f, тј. има 5 нула, рачунајући вишеструкости. Још треба испитати да ли су можда неке од ових нула вишеструке. То се у овом случају најзгодније испитује преко нула првог извода. Други извод дате функције је $f''(z) = 12z^3(6z^4 - 10)$. Јасно је да $z = 0$ није нула функције f, а провером се види да то није ни ниједно $\tilde{z}$ за које је $\tilde{z}^4 = \frac{5}{3}$. Наиме, $f(\tilde{z}) = \tilde{z}^9 - 6\tilde{z}^5 + 3\tilde{z} - 1 = (\tilde{z}^4)^2 \cdot \tilde{z} - 6\tilde{z}^4 \cdot \tilde{z} + 3\tilde{z} - 1 = -(\frac{38}{9}\tilde{z} + 1) \neq 0$. Дакле, ниједна нула није вишеструкости 3. Требало би још испитати да ли можда има нула вишеструкости 2, односно да ли први извод и дата функција имају заједничких нула...

Напомена: Студент бира 4 од 5 задатака.