ЗАДАЦИ СА ВЕЖБИ
ИЗ ПРЕДМЕТА
ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА

мр Милан Јовановић

ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ

1. Бацају се истовремено новчић и коцкица. Одредити скуп елементарних исхода.

2. У кутији су четири листића обележена бројевима 1, 2, 3 и 4. Извлачимо листиће,

   а) без враћања,

   б) са враћањем,

   све док не извучемо листић са непарним бројем. Одредити скуп елементарних исхода.

3. Стрелац гађа у циљ облика кружне мете полупречника дужине K, при чему се мери растојање поготка од центра мете. Одредити скуп елементарних исхода.

4. Посматра се n гостију у ресторану и региструје се да ли су наручили кафу или не, а онда се посматра још онолико гостију колико је међу првих n гостију наручило кафу и код њих се, такође, региструје да ли су наручили кафу или не. Одредити скуп елементарних исхода Ω и број елемената тог скупа. Сматрати да је укупан број гостију у ресторану већи или једнак $2n$.

5. Коцка чије су све стране обојене подељена је у 1000 мањих коцки једнаке величине. Израчунати вероватноћу да случајно изабрана коцка има тачно две обојене стране.

6. Израчунати вероватноћу да цифре десетица и јединица куба случајно изабраног природног броја буду јединице.

7. Из кутије у којој се налазе цедуље означене бројевима од 1 до n извлачи се једна по једна цедуља,

   а) без враћања,

   б) са враћањем,

   и бележе се добијени бројеви. Израчунати вероватноћу да буду редом извучени бројеви 1, $2, \ldots, n$.

8. Хотел има n соба поређаних једна до друге у правој линији. На случајан начин k $(k < n)$ гостију се размешта по собама. Израчунати вероватноћу да они заузму k суседних соба.

9. N људи се на случајан начин размешта за округлим столом $(N > 2)$. Израчунати вероватноћу да два одабрана лица не седну једно до другог.

10. Човек има у џепу n кључева од којих само један отвара врата. Кључеве редом вади из џепа (без враћања) док не нађе одговарајући кључ. Израчунати вероватноћу да тражени кључ извуче у k-том извлачењу, где је k фиксиран број такав да је $1 \leq k \leq n$.

11. Играчи A и B имају једнаке шансе да у једној партији неке игре освоје бод. Нема нерешених игара. Побеђује онај који први сакупи 6 бодова. Израчунати вероватноћу да победи играч A, односно играч B, ако је тренутни резултат $4:2$ за играча A.

12. Из складишта са n предмета, од којих је k неисправно, узима се одједном m предмета. Израчунати вероватноћу да међу тим предметима буде тачно l неисправних.

13. Из партитивног скупа скупа A, где је $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, на случајан начин бирају се (са враћањем) два елемента (подскупови скупа A) A_1 и A_2. Израчунати вероватноћу да буде

    а) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$;

    б) $A_1 \cup A_2 = A$.

    Подразумева се да је избор свих подскупова једнаковероватан.

14. За биоскопску салу која има n нумерисаних места све карте су распродате. Ако гледаоци случајно бирају места, израчунати вероватноћу да бар један гледалац седне на место за које има карту. Чему тежи та вероватноћа кад $n \to \infty$?

15. У воз који има m вагона пење се n $(n \geq m)$ путника. Израчунати вероватноћу да у сваки вагон уђе бар по један путник.

16. Из сегмента $[0, 1]$ на случајан начин бирају се два броја. Израчунати вероватноћу да њихов збир буде мањи од 1, а производ већи од $\frac{2}{9}$.

17. Растојање између две паралелне телефонске линије дужине l је d $(d < l)$. На свакој од телефонских линија на непознатом месту постоји прекид. Израчунати вероватноћу да је растојање R међу тачкама прекида не веће од a $(d < a < \sqrt{l^2 + d^2})$.

18. Из скупа $\{1, 2, \ldots, 22\}$ случајно је изабран један број. Израчунати вероватноћу да је изабран паран број ако је познато да је изабран број дељив са три.

19. У ред са 10 седишта на случајан начин седају 3 особе. Особе X и Y нису селе једна до друге. Израчунати вероватноћу да је особа Z села између особа X и Y.

20. Свака од 15 испитних цедуља садржи по 2 питања која се не понављају. Студент зна одговор на 25 питања. Да би положио испит он мора да одговори или на оба питања са цедуље коју прву извуче или на једно питање са цедуље коју прву извуче и на прво питање са цедуље коју другу извуче. Шта је вероватније, да падне испит или да га положи?

21. Задатак са кључевима. (10.)

22. У некој игри учествује 2^n играча. Играчи се на случајан начин деле у парове и играју 2^{n-1} мечева, а вероватноћа победе сваког од њих у неком мечу је $\frac{1}{2}$. У следећем колу 2^{n-1} победника претходног кола се дели на случајан начин у парове и игарају меч и тако даље. У игри учествују и играчи A и B. Израчунати вероватноћу да се A и B сусретну као противници.

23. Под претпоставком да су вероватноће рађања мушког и женског детета једнаке, испитати независност догађаја A - деца нису истог пола и B - међу децом је највише једна девојчица

    а) у породици са троје деце;

    б) у породици са четворо деце.

24. Задатак са играчима и резултатом 4:2. (11.)

25. На турниру треба одиграти три партије стоног тениса против шампиона A и нешто слабијег играча B по једној од шема $A - B - A$ или $B - A - B$. Награда се добија ако се победи у бар две партије узастопно. Коју шему изабрати?

26. У свакој партији између A и B играч A побеђује са вероватноћом p и нема нерешених исхода. Игра траје или док A не добије m партија (A победник) или док A не изгуби n партија (B победник). Израчунати вероватноћу да A победи у целој игри.

27. Пијаница стоји на растојању од једног корака до ивице провалије. На случајан начин он прави корак за кораком, или према ивици или од ивице провалије. На сваком кораку вероватноћа да крене према провалији је p $(\frac{1}{3})$, а од провалије $1 - p$ $(\frac{2}{3})$. Израчунати вероватноћу да пијаница падне у провалију.

28. У кутији са резервним деловима, који се по изгледу не разликују, је 5 нових и 3 стара дела. Случајно се бирају два дела одједном и користе извесно време, после чега се враћају у кутију. Након тога се опет случајно бирају два дела одједном.

    а) Израчунати вероватноћу да оба другоодабрана дела буду нова.

б) Ако су другоодабрани делови нови, израчунати вероватноћу да су првоодабрани делови били стари.

29. У кутији се налазе три куглице, од којих свака може бити бела или црна. Све претпоставке о броју белих куглица у кутији су једнако вероватне. Из кутије се четири пута, са враћањем, бира куглица. Који је највероватнији састав кутије ако је једном извучена црна и три пута бела куглица?

30. Вероватноћа да је одређена књига у библиотеци је p. Ако је та књига у библиотеци, онда се са истом вероватноћом налази на било којој од n полица. Прегледано је m ($m < n$) полица и та књига није нађена. Израчунати сада вероватноћу да је она у библиотеци.

31. Мајка је својој деци поделила колаче и то Аци три баклаве и две тулумбе, а Пери четири баклаве и четири тулумбе. Затим је изашла из кухиње. Незадовољан поделом, Аца је зграбио два колача из Периног и ставио их у свој тањир. Пера је покушао да узврати, али је успео да врати само један (не обавезно свој) колач. Враћајући се назад, мајка је приметила свађу и за казну је из Ациног тањира узела један колач и појела га. Израчунати вероватноћу да је мајка појела баклаву.

32. У првој кутији налазе се само беле куглице, а у другој кутији $\frac{1}{4}$ куглица су црне, а $\frac{3}{4}$ беле. Случајно се бира кутија и из ње се извлачи једна куглица. Испоставило се да је бела. Ову куглицу вратимо у кутију из које је извучена и из ње се опет извлачи једна куглица. Израчунати вероватноћу да ова куглица буде црна.

33. Нека је вероватноћа да у породици има n деце αp^n, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$, $\alpha > 0$. Претпоставља се да су све комбинације полова n деце једнако вероватне. Доказати да је за $k \geq 1$ вероватноћа да у породици има k дечака $\frac{2\alpha p^k}{(2-p)^{k+1}}$.

34. Играчи A и B играју низ партија, тако да у свакој победник добија један поен. У свакој партији A побеђује са вероватноћом α, а B са вероватноћом β, где је $\alpha + \beta = 1$ и $\alpha > \beta$. Победник меча је онај играч који сакупи два поена више од противника.

    а) Израчунати вероватноћу да играч A буде победник меча.

    б) Шта је погодније за играча A, да игра цео меч или само једну партију?

35. Из кутије у којој су четири цедуље нумерисане бројевима 1, 2, 3 и 4 извлачимо, без враћања, док не извучемо цедуљу са непарним бројем. Ако је X збир извучених бројева, а Y број извлачења, одредити законе расподела (вероватноћа) случајних величина X и Y и израчунати (математичка) очекивања и дисперзије тих случајних величина.

36. Из скупа $\{1, 2, ..., n\}$ ($n \geq 2$) на случајан начин бирају се одједном два различита броја x и y. Нека је $S = max\{x, y\}$. Одредити расподелу случајне величине S и израчунати $P\{0.5 < S \leq 3.56\}$, $P\{S > 2.6\}$, као и очекивање ES.

37. Из скупа $\{1, 2, ..., n\}$ на случајан начин бира се одједном m различитих бројева, $2 \leq m \leq n$. Нека је R максимално "растојање" међу одабраним бројевима. Одредити расподелу случајне величине R и израчунати очекивање ER.

38. Вероватноћа да кошаркаш погоди кош је p (0.7). Он гађа све док не погоди кош. Израчунати средњи број покушаја.

39. Случајна величина X има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу. Израчунати очекивање и дисперзију те случајне величине.

40. Вероватноћа да се догађај A оствари при неком експерименту је p, $0 < p < 1$. Експерименти се независно понављају све док се A не оствари тачно k пута ($k \geq 1$, k фиксиран број). Ако је X број изведених експеримената, одредити расподелу случајне величине X и израчунати очекивање EX.

41. Вероватноћа да се догађај A оствари при неком експерименту је p, $0 < p < 1$. Експерименти се независно понављају све док се или A или A^c не појави два пута узастопно. Ако је X број изведених експеримената, одредити расподелу случајне величине X и доказати да је $EX \leq 3$.

42. Задатак са непарном цедуљом. (35.) Одредити расподелу дводимензионалне случајне величине (X, Y), као и маргиналне расподеле за X и Y. Испитати независност случајних величина X и Y и израчунати очекивање производа X и Y, EXY.

43. За случајне величине X и Y из претходног задатка, одредити расподелу случајне величине Z, где је $Z = X - Y$.

44. Нека су X_1 и X_2 независне случајне величине са геометријском $\mathcal{G}(p)$, $0 < p < 1$, расподелом. Ако је $Y = \max\{X_1, X_2\}$, одредити расподелу случајне величине Y.

45. Случајне величине X која има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу и Y која има Пуасонову $\mathcal{P}(\mu)$ расподелу су независне. Ако је $Z = X + Y$, одредити расподелу случајне величине Z.

46. У кутији је n куглица нумерисаних бројевима $1, 2, \ldots, n$. Из кутије се извлачи једна по једна куглица, без враћања, све док се не извуче куглица са бројем који није мањи од k, где је k унапред фиксиран број, $1 \leq k \leq n$. Ако је Y број извлачења до појаве такве куглице, одредити расподелу случајне величине Y и израчунати очекивање EY.

47. Баца се коцкица за игру. Израчунати очекивани број бацања до појаве свих бројева.

48. Резултат гађања је погодак, са вероватноћом p, или промашај, са вероватноћом q, $q = 1 - p$. Изводи се n независних гађања. Израчунати очекивани број промена резултата у тих n гађања.

49. Изводи се n независних експеримената. Вероватноћа успеха догађаја A у сваком експерименту је $P(A)$, тј. p. Ако је X број успеха догађаја A у тих n експеримената, одредити расподелу случајне величине X и израчунати очекивање EX и дисперзију DX.

50. Случајна величина X има биномну $\mathcal{B}(n, p)$ расподелу, а случајна величина Y биномну $\mathcal{B}(m, p)$ расподелу. Ако су X и Y независне и $Z = X + Y$, одредити расподелу случајне величине Z.

51. Случајна величина X има биномну $\mathcal{B}(n, p)$ расподелу. Ако је $Y = n - X$, одредити расподелу случајне величине Y.

52. Познато је да у неком граду становник има бицикл са вероватноћом 0.02, а мотор са вероватноћом 0.01, с тим што нико нема и бицикл и мотор. Израчунати вероватноћу да од 100 случајно изабраних становника број оних који поседују бар једно од ова два превозна средства буде између 2 и 6 (укључујући и те бројеве).

53. Из скупа бројева $\{1, 2, \ldots, n\}$ на случајан начин се, са враћањем, извлачи $2n$ бројева ($n \geq 100$). Одредити најмањи број k такав да вероватноћа да број извучених четворки не буде мањи од k износи највише 0.05.

54. Фабрика у току дана произведе 1000 аутомобила од којих сваки са вероватноћом 0.05 захтева дораду. Колики треба да буде капацитет паркинга, па да са вероватноћом 0.9 буде довољан за аутомобиле који чекају дораду?

55. Стрелац погађа циљ са вероватноћом 0.4. Колико најмање гађања треба да планира, па да вероватноћа да ће имати бар 80 погодака буде 0.9?

56. У позориште са 1000 места посетиоци улазе случајно на два улаза који имају по гардеробу. Колико најмање места треба да буде у свакој гардероби, па да са вероватноћом 0.99 посетиоци могу да оставе своје ствари у гардероби улаза на који су и ушли?

57. На неким изборима за кандидата A гласало је m бирача, а за кандидата B гласало је n бирача, при чему је $m > n$. Израчунати вероватноћу да је током гласања све време водио кандидат A.

58. Баца се новчић. Ако падне глава случајна величина X узима вредност -1, иначе узима вредност 1. Одредити функцију расподеле (вероватноћа) те случајне величине.

59. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[0,1]$ расподелу. Одредити функцију расподеле те случајне величине.

60. Дата је функција $f(x) = \begin{cases} a(1-x)^2, & x \in [0,1], \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$

    а) Израчунати константу a за коју је $f(x)$ густина расподеле (вероватноћа) неке случајне величине X.

    б) Одредити функцију расподеле те случајне величине.

    ц) Израчунати $P\{X > \frac{1}{3}\}$.

    д) Израчунати очекивање EX и дисперзију DX.

61. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ расподелу. Ако је $Y = \cos X$, одредити густину расподеле случајне величине Y и израчунати очекивање EY.

62. Случајна величина X има Кошијеву расподелу, тј. њена густина расподеле је $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Ако је $Y = \frac{1}{X}$, одредити расподелу случајне величине Y.

63. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу. Одредити функције расподела следећих случајних величина:

    а) $Y = |1 - X|$;

    б) $Z = \min\{X, X^2\}$;

    ц) $T = [X]$.

64. Број φ се случајно бира из сегмента $[0, \frac{\pi}{2}]$, а затим се кроз тачку $A(0,1)$ повлачи права која са позитивним делом x осе заклапа угао φ. Ако је D удаљеност те праве од координатног почетка, одредити расподелу случајне величине D.

65. Штап дужине $b - a$ случајно се ломи на једном месту. Израчунати очекивану дужину краћег дела штапа.

66. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[-1,2]$ расподелу. Ако је $Y = \min\{X, 1\}$, одредити расподелу случајне величине Y и израчунати очекивање EY.

67. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[0,1]$ расподелу. Ако је $Y = \frac{1}{X} - [\frac{1}{X}]$, одредити расподелу случајне величине Y.

68. Дата је функција расподеле дводимензионалне случајне величине (X,Y):
    $F(x,y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$

    а) Одредити густину расподеле случајне величине (X,Y).

    б) Испитати независност случајних величина X и Y.

    ц) Ако је $T = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, израчунати $P\{(X,Y) \in T\}$.

69. Тачка $A(X,Y)$ се случајно бира у квадрату D са теменима $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ и $(0,-1)$. Одредити густину расподеле случајног вектора (X,Y), као и маргиналне расподеле случајних величина X и Y.

70. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу. Ако је $Y = \frac{\lambda}{\mu} \cdot X$, где је $\mu > 0$, одредити расподелу случајне величине Y, а затим случајног вектора (X, Y).

71. Случајне величине X и Y су независне и имају исту експоненцијалну $\mathcal{E}(1)$ расподелу. Ако је $Z = |X - Y|$, одредити густину расподеле случајне величине Z.

72. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha)$ расподелу, случајна величина Y има униформну $\mathcal{U}[0, h]$ расподелу и независне су. Ако је $Z = X + Y$, одредити густину расподеле случајне величине Z.

73. Случајно се бира тачка (X, Y) унутар квадрата са теменима $A(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $B(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и $D(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Ако је $Z = XY$, одредити расподелу случајне величине Z.

74. Након свађе око колача страсти су се мало смириле и Пери и Аци у госте је дошао Јова да би играли игрице на рачунару. Пошто имају два рачунара Пера и Аца су одмах заузели своја места и кренули да се играју. Јови је остало једино да чека. Познато је да свако од троје деце, независно од друге двојице, случајно одређује колико ће да се игра, с тим да је то најмање 10, а највише 30 минута. Одредити:

   а) вероватноћу да ће Јови место уступити Пера;

   б) густину расподеле и очекивање Јовиног времена чекања;

   ц) вероватноћу да Јова неће остати последњи да се игра.

   Сматрати да кад било које дете устане од рачунара не враћа се поново да се игра.

75. Случајна величина X има $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ расподелу, случајна величина Y има униформну $\mathcal{U}[0, 1]$ расподелу и независне су. Ако је $Z = X + Y$, одредити расподелу случајне величине Z.

76. Независно се бирају случајни бројеви $X_1, X_2, ...$ са сегмента $[0, 1]$. Нека је дат фиксиран број t, $t \in (0, 1)$. Нека је $N(t)$ први индекс такав да је $X_{N(t)} \geq t$ и нека је $Y(t) = X_{N(t)} - t$.

   а) Одредити расподелу случајног вектора $(Y(t), N(t))$.

   б) Да ли су случајне величине $Y(t)$ и $N(t)$ независне?

77. Ако за случајну величину X важи да је $EX = 3$ и $DX = 0.01$, проценити $P\{2.5 < X < 3.5\}$.

78. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[-1, 1]$ расподелу. Ако је $Y = sgnX$, израчунати коефицијент корелације случајних величина X и Y.

79. Ако су $X_1, X_2, ..., X_n$ независне случајне величине са истом униформном $\mathcal{U}[0, 1]$ расподелом и ако је $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, а $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, израчунати коефицијент корелације случајних величина $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$.

80. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[0, 1]$ расподелу. Ако је $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \cdot I\{\frac{k-1}{n} < X \leq \frac{k}{n}\}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, израчунати коефицијент корелације случајних величина X и Y_n.

81. Нека су $X_1, X_2, ..., X_n$ независне случајне величине са истом расподелом $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $0 < p < 1$. Одредити условну расподелу случајне величине X_1 при услову $X_1 + X_2 + ... + X_n = k$, тј. расподелу за $X_1 | X_1 + X_2 + ... + X_n = k$.

82. Дводимензионална случајна величина (X, Y) има униформну расподелу на троуглу са теменима $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Одредити $f_{X|Y=y}(x)$ - условну густину расподеле случајне величине X при услову $Y = y$.

83. Из сегмента $[0,1]$ случајно се бира број X, а затим се из сегмента $[\frac{X}{2}, X]$ случајно бира број Y. Одредити расподелу случајне величине Y.

84. Дводимензионална случајна величина (X,Y) има униформну расподелу на троуглу са теменима $(0,0)$, $(3,0)$ и $(2,1)$. Одредити $f_{Y|X\in[1,2]}(y)$ - условну густину расподеле случајне величине Y при услову $X \in [1,2]$.

85. Одредити карактеристичну функцију случајне величине:

   а) X_1 која има $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ расподелу;

   б) X_2 која има биномну $\mathcal{B}(n,p)$ расподелу;

   ц) X_3 која има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу и доказати да ако X_3 има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу, а X_4 има Пуасонову $\mathcal{P}(\mu)$ расподелу и независне су, онда њихов збир $X_3 + X_4$ има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$ расподелу;

   д) X_5 чија густина расподеле је $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, а затим израчунати очекивање EX_5 и дисперзију DX_5.

86. Доказати да линеарна комбинација n независних случајних величина са нормалном расподелом има нормалну расподелу.

87. Одредити расподелу случајне величине за чију карактеристичну функцију $\varphi(t)$ важи да је:

   а) $\varphi(t) = \frac{3+\cos t}{4}$;

   б) $\varphi(t) = (1-\beta)(1+\alpha)^{-1}(1+\alpha e^{-it})(1-\beta e^{it})^{-1}$, $0<\alpha<\beta<1$;

   ц) $\varphi(t) = \frac{1}{2-e^{it}}$.

88. За низ случајних величина (X_n) важи да је $EX_n = n$, а $DX_n = 1$. Ако је c фиксиран број који припада интервалу $(0,1)$, израчунати вероватноћу да ће бесконачно много пута бити $X_n < cn$ кад $n \in \mathbb{N}$.

89. Нека је $\Omega = \{\omega_k | k \in \mathbb{N}\}$ скуп елементарних исхода неког експеримента и $P\{\omega_k\} = \frac{6}{\pi^2 k^2}$. За сваки природан број n нека је $X_n(\omega_k) = \begin{cases} n, & k=n, \\ 0, & k\neq n, \end{cases}$, а $Y_n = 1 - \frac{X_n}{n^2}$. Испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (X_n), односно низа случајних величина (Y_n).

90. За сваки природан број n случајна величина X_n има униформну $\mathcal{U}[0,\frac{1}{n}]$ расподелу, а независна од ње случајна величина Y_n има закон расподеле $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Ако је $Z_n = X_n + Y_n$, испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (Z_n).

91. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има униформну $\mathcal{U}[0,n]$ расподелу. Ако је $Y_n = \min\{1, X_n\}$, испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (Y_n).

92. Ако низ случајних величина (X_n) конвергира у средње квадратном ка случајној величини X, онда $EX_n \to EX$ и $DX_n \to DX$ кад $n\to\infty$. Доказати.

93. Случајна величина Y има униформну $\mathcal{U}[0,1]$ расподелу. За сваки природан број n нека је $X_n = a_n I\{Y < \frac{1}{n}\} + Y \cdot I\{Y \geq \frac{1}{n}\}$. Одредитити низ бројева (a_n) тако да за свако $n \in \mathbb{N}$ буде $EX_n = 0$ и за тако изабране a_n испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (X_n).

94. У зависности од вредности реалног параметра α $(\alpha > 0, \alpha \neq 1)$, испитати све четири врсте конвергенције низа независних случајних величина чији општи члан X_n има униформну $\mathcal{U}([0,\frac{1}{n^\alpha}] \cup [1, 1+\frac{1}{n}])$ расподелу.

95. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ расподелу и нека је $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Доказати да низ случајних величина (S_n) конвергира у расподели ка случајној величини S_∞, где S_∞ има униформну $\mathcal{U}[-1,1]$ расподелу.

96. Испитати да ли закон великих бројева важи за низ независних случајних величина чији општи члан X_n има:

   а) закон расподеле $\begin{pmatrix} -\sqrt{\ln n} & \sqrt{\ln n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

   б) густину расподеле $f_{X_n}(x) = ne^{-nx}$, $x \geq 0$;

   ц) закон расподеле $\begin{pmatrix} -2^n & 2^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

97. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има густину расподеле $f_{X_n}(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$, $x > 0$. Испитати да ли за овај низ важи закон великих бројева.

98. Нека је низ случајних величина (X_n) такав да за сваки природан број n важи да је $EX_n = 0$ и $DX_n \leq C$, где је C константа која је већа од 0, и било који члан X_n зависи само од претходног X_{n-1} и следећег X_{n+1}, а независан је од осталих чланова низа. Доказати да за овај низ важи слаби закон великих бројева.

99. Рачунар у процесу сабирања бројева врши заокруживање на најближи цео број. Претпоставља се да су грешке настале заокруживањем независне и униформно расподељене на сегменту $[-0.5, 0.5]$.

   а) Ако се сабира 1500 бројева, израчунати вероватноћу да апсолутна вредност укупне грешке буде већа од 15.

   б) Колико се највише бројева може сабрати, па да са вероватноћом 0.9 вредност укупне грешке буде мања од 10?

100. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} = \frac{1}{2}$.

МАТЕМАТИЧКА СТАТИСТИКА

101. Нека је $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ узорак из популације чије обележје X има нормалну $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ расподелу. Доказати да:

   а) случајна величина $\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n}$ има нормалну $\mathcal{N}(0,1)$ расподелу;

   б) случајна величина $\frac{n\overline{S}_*^2}{\sigma^2}$ има χ_n^2 расподелу ($\overline{S}_*^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$);

   ц) случајна величина $\frac{n\overline{S}_n^2}{\sigma^2}$ има χ_{n-1}^2 расподелу;

   д) случајна величина $\frac{\overline{X}_n - m}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1}$ има Студентову t_{n-1} расподелу.

102. Нека су дати независни узорци: $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ из популације чије обележје X има нормалну $\mathcal{N}(m_1, \sigma^2)$ расподелу и $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ из популације чије обележје Y има нормалну $\mathcal{N}(m_2, \sigma^2)$ расподелу. Одредити расподелу случајне величине $\frac{(\overline{X}_n - m_1) - (\overline{Y}_k - m_2)}{\sqrt{n\overline{S}_n^2(X) + k\overline{S}_k^2(Y)}}\sqrt{\frac{nk}{n+k}(n+k-2)}$.

103. Нека су дати независни узорци: $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ из популације чије обележје X има нормалну $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ расподелу и $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ из популације чије обележје Y има нормалну $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ расподелу. Одредити расподелу случајне величине $\frac{n(k-1)\sigma_2^2\overline{S}_n^2(X)}{k(n-1)\sigma_1^2\overline{S}_k^2(Y)}$.

104. Обележје X (посматране популације) има нормалну $\mathcal{N}(m, m)$ расподелу. За оцену непознатог параметра m предложене су две статистике: узорачка средина $\overline{X}_n$ и поправљена узорачка дисперзија $\widetilde{S}_n^2$. Испитати непристрасност и постојаност тих оцена. Испитати која је оцена боља у средње квадратном смислу.

105. Обележје X има густину расподеле $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$, $x \in (0,1]$, $\theta > 0$. За оцену непознатог параметра θ предложена је статистика $V = \frac{n-1}{-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln X_k}$. Испитати да ли је та оцена ефикасна.

106. Обележје X има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу. На основу узорка обима n методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра λ, а затим испитати непристрасност и ефикасност тако добијене оцене.

107. Обележје X има густину расподеле $f(x;\theta) = \theta^2 x e^{-\theta x}$, $x \geq 0$, $\theta > 0$. На основу узорка обима n методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра θ.

108. Вероватноћа да се догађај A оствари при неком експерименту је p, $0 < p < 1$. Експерименти се независно понављају или до прве појаве догађаја A или до N-тог покушаја, где је $N \geq 1$ и унапред познат број. Број експеримената до краја серије се бележи. На основу регистрованих n бројева, тј. на основу n серија, методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра p.

109. Методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра θ на основу узорка обима n из популације чије обележје X има:

   а) униформну $\mathcal{U}[0, \theta]$, $\theta > 0$, расподелу;

   б) униформну $\mathcal{U}[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$, расподелу;

   ц) униформну $\mathcal{U}[0, \theta]$, $\theta \geq 1$, расподелу;

   д) униформну $\mathcal{U}[0, \theta]$, $\theta \in \mathbb{N}$, расподелу. У овом случају испитати непристрасност и постојаност тако добијене оцене.

110. Обележје X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу, где је λ непознати параметар. На основу узорка (2.3, 3.4, 1.2, 2.5, 0.6) методом максималне веродостојности одредити оцену за вероватноћу $P\{X \geq 1\}$.

111. Обележје X има густину расподеле $f(x;\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}$, $x\geq\theta_1$, $\theta_1>0$, $\theta_2>0$. На основу узорка обима n методом максималне веродостојности одредити оцене непознатих параметара θ_1 и θ_2.

112. Из популације чије обележје X има нормалну $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ расподелу извучен је узорак обима 10, чија је узорачка средина $\overline{x}_{10}=5.5$, а узорачка дисперзија $\overline{s}^2_{10}=36$.

а) Одредити 90% интервал поверења за непознати параметар m.

б) Одредити 90% једнострани (доњи, горњи) и двострани интервал поверења за непознати параметар σ^2, као и за непознати параметар σ.

113. Из популације чије обележје X има нормалну $\mathcal{N}(m,16)$ расподелу извучен је узорак обима 64, чија је узорачка средина $\overline{x}_{64}=5$. Констатовано је да је β% интервал поверења за m једнак $(4,6)$. Израчунати β.

114. Обележје X има униформну $\mathcal{U}[0,1+\theta]$, $\theta>0$, расподелу, где је θ непознати параметар. Узет је узорак обима 200 и констатовано је да је у узорку 150 елемената који су мањи од 1.

а) Одредити 95% интервал поверења за вероватноћу p, где је $p=P\{X<1\}$.

б) На основу резултата под (а) одредити 95% интервал поверења за θ.

115. Из популације чије обележје X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу извучен је узорак:

I_k	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6)$	$[6,\infty)$
n_k	493	378	298	211	171	45	4

Одредити 98% интервал поверења за непознати параметар λ.

116. У кутији је 10 куглица, црвених и белих. Тестира се (нулта) хипотеза H_0(у кутији су 2 црвене и 8 белих куглица) против (алтернативне) хипотезе H_1(у кутији су више од 2 црвене куглице), тако што се из кутије извлаче две куглице једна за другом, без враћања, па ако су обе извучене куглице црвене, хипотеза H_0 се одбацује, иначе се не одбацује. Израчунати вероватноћу грешке прве врсте и функцију моћи тог теста.

117. Нека је хипотеза H_0(обележје X има густину расподеле $f_0(x)=1$, $0\leq x\leq 1$), а хипотеза H_1(обележје X има густину расподеле $f_1(x)=2x$, $0\leq x\leq 1$). На основу узорка (X_1,X_2) треба се определити за једну од ове две хипотезе. Предложена су два теста чије су критичне области $W_1=\{(x_1,x_2)|x_1\geq k_1,x_2\geq k_1\}$, односно $W_2=\{(x_1,x_2)|x_1+x_2\geq k_2\}$, оба са истим прагом значајности α, где је $\alpha=\frac{1}{8}$. Испитати који је тест бољи. Подразумева се да је познато да обележје X узима вредности из сегмента $[0,1]$.

118. Нека је хипотеза $H_0(X:\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\0.1&0.1&0.1&0.1&0.1&0.1&0.1&0.1&0.1&0.1\end{pmatrix})$, а хипотеза H_1 $(X:\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\0.01&0.42&0.01&0.01&0.5&0.01&0.01&0.01&0.01&0.01\end{pmatrix})$. Са прагом значајности 0.03, одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе H_0 против хипотезе H_1 на основу узорка обима 2. Израчунати вероватноћу грешке друге врсте тако одабраног теста.

119. Обележје X има нормалну $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ расподелу, где је σ^2 непознати параметар. Са прагом значајности 0.05, одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе $H_0(\sigma^2=1)$ против хипотезе $H_1(\sigma^2=2)$ на основу узорка обима 10 .

120. Из популације чије обележје X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\frac{1}{\lambda})$ расподелу извучен је узорак обима n.

а) Одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе $H_0(\lambda=1)$ против хипотезе $H_1(\lambda\neq 1)$ $(H_1(\lambda=\lambda_1),\lambda_1\neq 1)$.

б) Испитати да ли је тај тест униформно најмоћнији за тестирање хипотезе $H_0(\lambda = 1)$ против хипотезе $H_1(\lambda \neq 1)$.

ц) Израчунати вероватноћу грешке друге врсте тог теста ако је обим узорка 100, алтернативна хипотеза $H_1(\lambda = 2)$, а праг значајности 0.05.

121. Обележје X има густину расподеле $f(x;\theta) = \frac{1-\theta}{x^\theta}$, $x \in (0,1)$, где је θ непознати параметар такав да $\theta \in [0,1)$.

а) Одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе $H_0(\theta = 0)$ против хипотезе $H_1(\theta = \theta_0)$, $\theta_0 > 0$, на основу узорка обима n.

б) Испитати да ли је тај тест униформно најмоћнији за тестирање хипотезе $H_0(\theta = 0)$ против хипотезе $H_1(\theta > 0)$.

ц) Одредити функцију моћи $M(\theta)$ тог теста ако је обим узорка 2, а праг значајности α.

122. На основу узорка обима n тестирати хипотезу H_0(обележје X има нормалну $\mathcal{N}(0,1)$ расподелу) против хипотезе H_1(обележје X има густину расподеле $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$). Одредити најбољу критичну област ако је обим узорка 100, а праг значајности 0.05.

123. Из популације чије обележје X има нормалну $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ расподелу извучен је узорак обима 20 и констатовано је да је узорачка средина $\overline{x}_{20} = 53.5$, а узорачка дисперзија $\overline{s}^2_{20} = 45.85$. Са прагом значајности 0.05 тестирати:

а) хипотезу $H_0(m = 60)$;

б) хипотезу $H_0(\sigma^2 = 50)$ против хипотезе $H_1(\sigma^2 < 50)$.

124. Из две популације чија су обележја X које има нормалну $\mathcal{N}(m_1, 6^2)$ расподелу и Y које има нормалну $\mathcal{N}(m_2, 5^2)$ расподелу извучени су независни узорци обима 12 и 10 и констатовано је да су узорачке средине $\overline{x}_{12} = 178$ и $\overline{y}_{10} = 176.6$. Са прагом значајности 0.04 тестирати хипотезу $H_0(m_1 = m_2)$ против хипотезе $H_1(m_1 > m_2)$.

125. Из две популације чија су обележја X које има нормалну $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ расподелу и Y које има нормалну $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ расподелу извучени су независни узорци обима 8 и 10 и констатовано је да су узорачке дисперзије $\overline{s}^2_8(X) = 46$ и $\overline{s}^2_{10}(Y) = 50$. Са прагом значајности 0.1 тестирати хипотезу $H_0(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$.

126. Један лек помаже у лечењу неке болести у 80% случајева. Нови лек за ту болест је помогао у 250 од 300 случајева. Са прагом значајности 0.03 тестирати хипотезу да је нови лек ефикаснији од старог.

127. Из популације чије је обележје X извучен је узорак:

X_k	1	2	3	4	5	≥ 6
M_k	45	30	15	6	2	2

Са прагом значајности 0.05 тестирати хипотезу да обележје X има закон расподеле $P\{X = k\} = \frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

128. Из популације чије је обележје X извучен је узорак:

I_k	$[0,1]$	$[1.5, 2.5]$	$(2.5, 3.5]$	$(3.5, 5]$
M_k	52	35	9	4

Са прагом значајности 0.02 тестирати хипотезу да обележје X има експоненцијалну расподелу.