AFINA I EUKLIDSKA GEOMETRIJA

(1) U četvorodimenzionom afinom prostoru $\mathcal{A} = \mathbb{R}^4_{af}$ dat je skup $S = \{(x_1, \dots, x_4) | x_3 = 3, x_i \in \mathbb{R}\}$. Dokazati da je skup S afini potprostor prostora $\mathcal{A}$. Ispitati položaj potprostora S i ravni određene tačkom $O(0,0,0,0)$ i vektorima $\vec{v}_1 = (1,0,1,0)$ i $\vec{v}_2 = (0,-1,1,1)$.

(2) U n-dimenzionom afinom prostoru $\mathcal{A}$ dati su afini potprostori Π i Γ. Neka je $T_{P,Q}$ težište tačaka A, $P \in \Pi$, $Q \in \Gamma$, pri čemu je A fiksirana tačka prostora $\mathcal{A}$.

(a) Dokazati da je skup $\Sigma = \{T_{P,Q} : P \in \Pi, Q \in \Gamma\}$ jedan potprostor od $\mathcal{A}$.
(b) Dokazati da je potprostor Σ paralelan i sa Π i sa Γ.
(c) Ispitati specijalan slučaj: $n = 3$ i $\dim \Pi = \dim \Gamma = 1$.

(3) U 4-dimenzionom afinom prostoru $\mathcal{A}$ date su prave $\Delta : x_1 = 3 - t,\ x_2 = -1 + 2t,\ x_3 = 2 - t,\ x_4 = 5t$ i $\Gamma : x_1 + x_2 + x_3 = 3,\ x_1 - x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0$. Odrediti potprostor najmanje dimenzije koji sadrži ove prave.

(4) Naći jednačinu trodimenzione ravni u petodimenzionom afinom prostoru koja:

a) sadrži tačku $M(0,1,-1,3,4)$ i paralelna je ravni $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_4,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2x_5$;
b) sadrži dve tačke $M_1(1,3,1,0,1)$ i $M_2(0,0,1,1,-1)$ i paralelna je ravni $\alpha :\ x_1 + x_2 - 1 = 0,\ x_1 - x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + x_3 - x_5 + 1 = 0$;
c) sadrži tačke $M_1(-1,2,0,0,4)$, $M_2(1,1,1,1,1)$ i $M_3(0,1,3,-1,1)$ i paralelna je pravoj $l :\ x_1 = 1 + 2t,\ x_2 = 3 - t,\ x_3 = 4,\ x_4 = 1 + t,\ x_5 = -t,\ t \in R$.

(5) Naći jednačine traženih ravni u četvorodimenzionom afinom prostoru:

a) dvodimenzione ravni koja sadrži tačku $A(-1,0,2,3)$ i pravu $l :\ x_1 = 1 - t,\ x_2 = 3 + 2t,\ x_3 = 1 + t,\ x_4 = 3t,\ t \in R$;
b) dvodimenzione ravni koja sadrži paralelne prave $l_1 :\ x_1 = -1 + 2t,\ x_2 = t,\ x_3 = 0,\ x_4 = -5 - t,\ t \in R$ i $l + 2 :\ \ x_1 = 3 + 2s,\ x_2 = -4 + s,\ x_3 = 1,\ x_4 = -s,\ s \in R$;
c) trodimenzione ravni koja sadrži tačku $A(-3,0,1,0)$ i dvodimenzionu ravan $\alpha :\ x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0,\ x_1 + x_2 + x_4 = 0$.

(6) U petodimenzionom afinom prostoru ispitati uzajamni položaj ravni $\Pi : x_1 = x_2 = 1,\ x_3 + x_4 = x_5$ i $\Sigma : x_1 = 2 + t,\ x_2 = 3,\ x_3 = 3 + 2s,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5 + t + s$.

(7) U četvorodimenzionalnom prostoru odrediti medjusobni položaj ravni $\Pi :\ x_1 + x_2 + 1 = 0, x_3 - x_4 = 0$ i $\Gamma :\ x_1 = 1 + t, x_2 = 2 + s, x_3 = t - 2s, x_4 = 1 + t - s, t, s \in \mathbb{R}$.

(8) U četvorodimenzionom afinom prostoru $\mathcal{A}$ data je ravan $\Pi : x_1 = 1 + t, x_2 = 2 + t + s, x_3 = -t - s, x_4 = 1 - t$ i prava Δ određena tačkama $A(1,1,0,3)$ i $B(1,1,3,0)$. Odrediti uzajamni položaj ravni Π i prave Δ.

(9) U četvorodimenzionom afinom prostoru odrediti ravan najmanje dimenzije koja sadrži prave $\Pi :\ x_1 = -1 + t, x_2 = 0, x_3 = 1 - t, x_4 = -3 + t$ i $\Gamma :\ x_1 - x_2 = 1, x_1 - x_4 = 2, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$.

(10) Odrediti jednačinu trodimenzione ravni u petodimenzionom afinom prostoru koja sadrži tačke $A_1(-1,2,0,0,4)$, $A_2(1,1,1,1,1)$, $A_3(0,1,3,-1,1)$ i paralelna je pravoj $l : x_1 = 1 + 2t, x_2 = 3 - t, x_3 = 4, x_4 = 1 + t, x_5 = -t, t \in \mathbb{R}$.

(11) U 4-dimenzionom afinom prostoru $\mathcal{A}$ date su prave $\Delta : x_1 = -1 + t,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1 + t,\ x_4 = -3 + t$ i $\Gamma : x_1 - x_2 = 1,\ x_1 - x_4 = 2,\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$.

(a) Odrediti parametarsku jednačinu prave Γ.
(b) Odrediti jednačinu ravni Π najmanje dimenzije koja sadrži prave Δ i Γ.

(12) U 5-dimenzionom afinom prostoru data je ravan $\Pi : x_1 + x_2 - 1 = 0,\ x_1 - x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + x_3 - x_5 + 1 = 0$ i tačke $M_1(1,3,1,0,1)$ i $M_2(0,0,1,1,-1)$.

(a) Odrediti direktrisu ravni Π.
(b) Odrediti jednačinu ravni najmanje dimenzije koja sadrži tačke M_1 i M_2 i paralelna je ravni Π.

(13) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru odrediti jednav cinu prave l koja sadrži tačku $A(1,0,2,4)$, seče pravu $q : x_1 - 1 = x_2 - 2 = x_3 - 3 = x_4 - 4$ i paralelna je hiperravni $\pi : x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2013 = 0$.

(14) Neka su A, B, C tri fiksirane nekolinearne tačke afinog prostora $\mathcal{A}^n$ i α, β, γ realni brojevi takvi da $\alpha + \beta + \gamma \neq -1$. Označimo sa M' baricentar sistema tačaka $(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma), (M,1)$.

(a) Dokazati da je time sa $\sigma_{\alpha\beta\gamma} : M \mapsto M'$ definisano afino preslikavanje.
(b) Dokazati da je $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ translacija ili homotetija.
(c) Predstaviti $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ u koordinatama za $n = 2$.
(d) Ako je $\pi_\alpha = \sigma_{\alpha\alpha\alpha}$ i ako su $A(0,0)$, $B(4,1)$, $C(2,2)$ koordinate tačaka u odnosu na dati reper afine ravni ($n = 2$), predstaviti u koordinatama preslikavanje π_1 i skicirati putanju proizvoljne tačke M.

(15) Neka je σ afina transformacija prostora $\mathcal{A}$ i $\mathcal{K}$ skup svih translacija prostora $\mathcal{A}$ koje komutiraju sa σ.

(a) Dokazati da je $\mathcal{K}$ Abelova grupa u odnosu na kompoziciju preslikavanja.
(b) Ako je tačka A fiksna tačka transformacije σ i $\tau \in \mathcal{K}$, onda je i $\tau(A)$ fiksna tačka za σ. Dokazati.
(c) Ako su A i B fiksne tačke za σ, onda je translacija za vektor $\overrightarrow{AB}$ element skupa $\mathcal{K}$. Dokazati.

(16) Odrediti formule:

(a) rotacije ρ oko koordinatnog početka za ugao $\frac{\pi}{3}$;
(b) rotacije ρ oko tačke $S(3,2)$ za ugao $\frac{\pi}{6}$ i odrediti sliku tačke $O(0,0)$ pri transformaciji ρ;
(c) homotetija $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ sa centrom u tački $S(-2,1)$ i koeficijentima redom 2 i -4 i odrediti sliku prave $2x - 4y + 7 = 0$ pri transformacijama $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$;
(d) dilatacija σ_1 i σ_2, čiji su koeficijenti redom 4 i -2, a x i y osa su redom osnova i pravac dilatacije i odrediti sliku jediničnog kruga sa centrom u $O(0,0)$ pri transformacijima σ_1 i σ_2;
(e) dilatacije σ čiji je koeficijent 4, osnova prava $y = x$, a pravac prava $y = -x$ i odrediti sliku jediničnog kruga sa centrom u $O(0,0)$ pri transformaciji σ.

(17) U orijentisanom euklidskom afinom prostoru $\mathcal{E}_2$ data je transformacija Φ svojim formulama u odnosu na ortonormirani reper $O_{e_1e_2}$:

(a) $x' = x - \frac{1}{5}$, $y' = y + 2$;
(b) $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 4$, $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$;
(c) $x' = -y + 1$, $y' = -x + 2$;
(d) $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 1$, $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - 1$;
(e) $x' = 2x - 3y + 1$, $y' = 3x + 2y - 2$.

Dokazati da je Φ izometrija ili sličnost, odrediti osnovne komponente i skicirati putanju tačke.

(18) U orijentisanom euklidskom afinom prostoru $\mathcal{E}_3$ data je transformacija Φ svojim formulama u odnosu na ortonormirani reper $O_{e_1e_2e_3}$:

(a) $x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 3$, $y' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1$, $z' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 8$.
(b) $x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z + \frac{4}{5}, y' = y + 2, z' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z + \frac{12}{5}$.
(c) $x' = 1 - z$, $y' = -x$, $z' = -2 + y$.
(d) $x' = 6 - 2x + 2y + z$, $y' = -4 + 2x + y + 2z$, $z' = 2 + x + 2y - 2z$.
(e) $x' = 1 - x - y - 2z$, $y' = -3 + 6x + 4y + 6z$, $z' = 1 - 2x - y - z$.
(f) $x' = 2x - 2y + z + 1$, $y' = 2x + y - 2z + 2$, $z' = x + 2y + 2z - 1$.
(g) $x' = 1 - x - 2y + 2z$, $y' = 1 - 2x + 2y + z$,$z' = 2x + y + 2z$.

Dokazati da je Φ izometrija ili sličnost, odrediti osnovne komponente i skicirati putanju tačke.

(19) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru $\mathcal{E}^4$ data je ravan $\Pi :\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3 = 0,\ x_1 + x_4 - 3 = 0$ i tačke $A(1,1,0,2)$ i $B(2,0,1,1)$. Odrediti tačku C koja pripada ravni Π tako da su kosinusi uglova $\angle BAC$ i $\angle ABC$ redom jednaki 0 i $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(20) Odrediti ortogonalnu projekciju i dopunu vektora $\overrightarrow{u}\ (4,-1,-3,4)$ na potprostor $\mathbb{W}$ koji je generisan vektorima $\overrightarrow{a}_1\ (1,1,1,1)$, $\overrightarrow{a}_2\ (1,2,2,-1)$ i $\overrightarrow{a}_3(1,0,0,3)$.

(21) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru dati su tačka $A(1,-2,1,-3)$ i potprostor $\Pi : x_1 - x_3 = 1, x_4 = 2$. Odrediti rastojanje tačke A od Π.

(22) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru odrediti rastojanje od tačke $A(2,4,-4,2)$ do afinog potprostora određenog jednačinama $x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1$ i $x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 2$.

(23) Date su tačka $M(4,2,-5,1)$ i ravan $\Pi: \ 2x_1-2x_2+x_3+2x_4=9,\, 2x_1-4x_2+2x_3+3x_4=12$ četvorodimenzionog euklidskog prostora. Odrediti podnožje normale iz tačke M na ravan Π, kao i rastojanje tačke M od ravni Π.

(24) Odrediti rastojanje tačke $X(1,2,-1,1)$ od afinog potprostora $\Pi = \{A + t_1 \overrightarrow{a}_1 + t_2 \overrightarrow{a}_2 | \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$, pri čemu je $A(0,-1,1,1)$, $\overrightarrow{a}_1\ (0,-3,-1,5)$ i $\overrightarrow{a}_2\ (4,-1,-3,3)$.

(25) U 4-dimenzionom euklidskom afinom prostoru $\mathcal{E}$ data je ravan $\Pi: x_1+2x_2-x_3+x_4=1,\ x_2-2x_3+x_4=2$ i tačka $P(1,-1,0,0)$.

a) Odrediti direktrisu ravni Π.

b) Odrediti rastojanje tačke P od ravni Π.

(26) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru zadata je dvodimenziona ravan α koja sadrži tačke $A(3,2,0,-1)$, $B(0,0,2,2)$ i $C(2,3,-1,0)$ i prava p čija je jednačina $x_1+x_2+x_3+x_4=5,\ 2x_1+x_2=3,\ -x_2+x_3+x_4=2$. Odrediti tačku $P \in p$ koja se nalazi na najkraćem rastojanju od ravni α i izračunati to rastojanje.

(27) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru dati su prava $p: x_1=x_2=x_3=x_4$ i ravan $\alpha: x_1=1-t$, $x_2=-1+s$, $x_3=s$, $x_4=1+t$. Odrediti rastojanje između prave p i ravni α, kao i tačku prave p koja je najbliža ravni α.

(28) U petodimenzionom euklidskom prostoru data je ravan $\alpha: x_1+x_5=1, -x_2+x_3+x_4+x_5+1=0$ i ravan β odredjena tačkom $B(2,0,-1,4,0)$ i vektorima $\omega_1=(1,0,0,0,1)$ i $\omega_2=(1,1,2,3,0)$. Odrediti ortogonalnu projekciju β na α i dimenziju projekcije.

(29) U petodimenzionom euklidskom prostoru E^5 data je trodimenziona ravan $\alpha: \ x_1=2+2s-t,\ x_2=1+t,$ $x_3=1+s-t+m,\ x_4=3-s+t+m,\ x_5=2-t,\ s,t,m \in R$ i dvodimenziona ravan $\beta: \ x_1=2+2q,$ $x_2=1-5p+q,\ x_3=1+2p-q,\ x_4=3+2p+3q,\ x_5=2-5p+3q,\ p,q \in R$. Naći normalnu projekciju ravni β na ravan α.

(30) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru dati su vektori $\overrightarrow{a}_1\ (1,2,2,2)$, $\overrightarrow{a}_2\ (2,-2,1,2)$, $\overrightarrow{a}_3\ (2,0,2,1)$, $\overrightarrow{a}_4\ (1,-2,0,-1)$ i tačke $X_1(4,5,3,2)$ i $X_2(1,-2,1,-3)$. Odrediti rastojanje od afinog potprostora $\Pi = \{\alpha \overrightarrow{a}_1 + \beta \overrightarrow{a}_2 + X_1 \mid \alpha, \beta \in R\}$ do afinog potprostora $\Sigma = \{\alpha_1 \overrightarrow{a}_3 + \beta_1 \overrightarrow{a}_4 + X_2 \mid \alpha_1, \beta_1 \in R\}$.

(31) U četvorodimenzionom prostoru odrediti pravu koja sadrži tačku $(0,1,2,3)$ normalna je na pravu $p: \frac{x_1-1}{2} = \frac{x_2-2}{1} = \frac{x_3-3}{2} = \frac{x_4-4}{1}$, seče pravu $q: \frac{x_1+1}{3} = \frac{x_2+1}{2} = \frac{x_3+3}{1} = \frac{x_4-7}{0}$, a sa pravom $r: x_1=x_2=x_3=x_4$ gradi ugao $\arccos\frac{1}{6}$.

(32) U četvorodimenzionom euklidskom vektorskom prostoru odrediti (najmanji) ugao između vektora $\overrightarrow{x}\ (1,3,-1,3)$ i vektorskog potprostora $\mathbb{P}$ generisanog vektorima $\overrightarrow{a}_1\ (1,-1,1,1)$ i $\overrightarrow{a}_2\ (5,1,-3,3)$.

(33) U petodimenzionom euklidskom prostoru date su tačke $A(0,1,-1,0,1)$ i $B(3,1,0,1,2)$. Odrediti ugao između prave AB i ravni $\Pi: \ x_1=t_1+t_2,\ x_2=5,\ x_3=-t_2,\ x_4=-t_1+t_2,\ x_5=2+t_1,\ t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$.

(34) U petodimenzionom euklidskom prostoru date su dvodimenzione ravni $\Pi: \ x_1=s, x_2=t, x_3=0, x_4=t, x_5=s, s,t \in \mathbb{R}$ i $\Gamma: \ x_1=q, x_2=1, x_3=2p, x_4=0, x_5=0, p,q \in \mathbb{R}$.

a) Odrediti jednačinu prave Δ koja seče ravni Π i Γ i ortogonalna je na njima.

b) Odrediti jednačinu sfere koja dodiruje ravni Π i Γ i čiji centar pripada pravoj Δ.

(35) Odrediti realan parametar t takav da postoji prava normalna na hiperravan $\alpha: x_1+x_2+x_3+x_4=2013$ koja seče prave $p: \frac{x_1-1}{1} = \frac{x_2-5}{1} = \frac{x_3}{3} = \frac{x_4+t}{0}$ i $q: \frac{x_1}{2} = \frac{x_2-5}{1} = \frac{x_3-7}{0} = \frac{x_4-3}{-1}$, a zatim i odrediti tu pravu.

(36) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru zadata je dvodimenziona ravan Π koja sadrži tačke $A(1,1,1,1)$, $B(2,2,0,0)$, $C(1,2,0,1)$ i prava Δ određena tačkama $D(1,1,1,2)$ i $E(1,1,2,1)$. Odrediti uzajamni položaj prave Δ i ravni Π, a zatim naći dužinu njihove zajedničke normale.

(37) U petodimenzionom euklidskom prostoru E^5 date su ravni $\alpha: \ x_1=t,\ x_2=-2,\ x_3=t,\ x_4=s,\ x_5=0,$ $t,s \in R$ i $\beta: \ x_1=0,\ x_2=p,\ x_3=q,\ x_4=p,\ x_5=q+1,\ p,q \in R$. Odrediti jednačinu njihove zajedničke normale.

(38) Date su ravni α i β i prava p u četvorodimenzionom euklidskom prostoru $\mathcal{E}^4$, svojim jednačinama $\alpha:$ $x_1+x_2+x_3-5=0$, $\beta: \ x_1+x_2-x_3-3=0$ i $p: \ \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{1} = \frac{x_4}{-1}$.

a) Odrediti jednačine simetralnih ravni γ_1 i γ_2 diedara koje obrazuju ravni α i β.

b) Odrediti jednačine svih sfera čiji centri leže na pravoj p i koje dodiruju ravni α i β.

(39) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru $\mathcal{E}^4$ dati su ravan $\pi: \quad x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 15 = 0$, i prava $p: \quad x_1 = s+2, x_2 = 2s, x_3 = -s-1, x_4 = -s-2, s \in R$. Odrediti jednačinu prave q koja leži u ravni π, sa pravom p zaklapa najmanji ugao i na najmanjem je rastojanju od koordinatnog početka.

(40) U četvorodimenzionom euklidskom afinom prostoru odrediti jednačinu prave koja pripada hiperravni $x+y+z-t=2$, sadrži tačku $A(1,1,1,1)$ i zaklapa minimalni ugao sa pravom $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{2} = \frac{t}{-1}$.

(41) U 4-dimenzionom euklidskom afinom prostoru $\mathcal{E}$ date su prave $\Delta: \frac{x_1-1}{1} = \frac{x_2-5}{1} = \frac{x_3}{3} = \frac{x_4+t}{0}$ i $\Gamma: x_1 - 3x_3 = 8$, $x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$, $2x_1 - 3x_2 = 1$.

a) Odrediti parametarsku jednačinu prave Γ.

b) Odrediti t tako da postoji prava normalna na hiperravan $\Pi: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2008$ koja seče prave Δ i Γ.

(42) U 4-dimenzionom euklidskom afinom prostoru $\mathcal{E}$ dati su ravan $\Pi: x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$, $x_2 + 2x_3 = 3$ i prava $\Gamma: x_1 = 1-t$, $x_2 = -2t$, $x_3 = -1$, $x_4 = 3t$. Odrediti ugao između Γ i Π.

(43) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru $\mathcal{E}^4$ data je ravan $\Pi: \quad 2x_1 + x_2 - x_3 - 3 = 0$, $x_1 + x_4 - 3 = 0$ i tačke $A(1,1,0,2)$ i $B(2,0,1,1)$. Odrediti tačku C koja pripada ravni Π tako da su kosinusi uglova $\angle BAC$ i $\angle ABC$ redom jednaki 0 i $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(44) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru dati su prava $p: x_1 = 0, x_2 = -2t, x_3 = t, x_4 = -5t$ i potprostor $\Pi: x_1 - x_3 = 1, x_4 = 2$. Odrediti u Π pravu koja sadrži tačku $B(2,0,1,2)$ i zaklapa sa prvom p najmanji ugao.

(45) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru dati su prava $p: \frac{x+1}{0} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1} = \frac{t-1}{1}$ i hiperravan Π koja sadrži ose x, z i t. Odrediti koordinate tačke S koja je presek prave p i ravni Π i prodore prave p kroz sferu sa centrom S i poluprečnikom $4\sqrt{3}$.

(46) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru $\mathcal{E}^4$ odrediti jednačinu prave p koja sadrži tačku $A(1,-1,2,0)$, seče pravu $q: x_1 + 2x_4 - 1 = 0$, $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 + 3 = 0$, $x_1 - 2x_2 - 1 = 0$ i paralelna je hiperravni $\pi: x_1 + 6x_3 + x_4 = 2008$.

(47) Neka je prava p' ortogonalna projekcija prave p na ravan α, a q' ortogonalna projekcija prave q na ravan β. Odrediti ravan najmanje dimenzije koja sadrži prave p' i q'.

a) $$p: \frac{x_1-1}{1} = \frac{x_2}{-2} = \frac{x_3+1}{7} = \frac{x_4+1}{-2}, \quad \alpha: x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1,$$
$$q: \frac{x_1-1}{1} = \frac{x_2+1}{0} = \frac{x_3+2}{1} = \frac{x_4+3}{0}, \quad \beta: x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 3;$$

b) $$p: \frac{x_1-4}{-1} = \frac{x_2-1}{2} = \frac{x_3+2}{1} = \frac{x_4-2}{0}, \quad \alpha: x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1,$$
$$q: \frac{x_1-2}{0} = \frac{x_2-1}{1} = \frac{x_3+1}{5} = \frac{x_4}{0}, \quad \beta: x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

(48) U petodimenzionom euklidskom prostoru date su ravni $\alpha: x_1 = x_2 = 1, x_3 + x_4 = x_5$ i $\beta: x_1 = s-t, x_2 = 1, x_3 = s$, $x_4 = 1-t, x_5 = 3-s+t, s,t \in \mathbb{R}$. Odrediti formule preslikavanja koje predstavlja kompoziciju ortogonalnih projekcija redom na ravni α i β.

(49) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru data je prava $\Delta: x_1 = t, x_2 = 1+t, x_3 = -2+t, x_4 = -t, t \in \mathbb{R}$ i tačka $S(1,2,-1,0)$. Odrediti formule preslikavanja koje predstavlja kompoziciju centralne simetrije sa centrom u tački S i simetrije u odnosu na pravu Δ.

(50) Odrediti koordinate tačke M_1 koja je simetrična tački $M(2,2,1,-1)$ u odnosu na ravan $\Pi: x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$.

(51) Odrediti formule preslikavanja u odnosu na ortonormirani reper Oe_1e_2 ravni koje predstavlja kompoziciju centralne simetrije sa centrom u tački $A(1,2)$ i refleksije u odnosu na pravu $x + 2y = 3$.

(52) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru date je ravan $\alpha: -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 1 = 0, -x_2 + 2x_3 - x_4 + 1 = 0$ i sfere $S_1: (x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 + (x_3+3)^2 + (x_4-1)^2 = 1$, $\quad S_2: (x_1-3)^2 + (x_2-7)^2 + (x_3-13)^2 + (x_4-1)^2 = 9$. Odrediti formule preslikavanja koje predstavlja kompoziciju simetrije u odnosu na α i homotetije sa negativnim koeficijentom koja slika S_1 u S_2.

(53) Odrediti formule homotetije sa pozitivnim koeficijentom koja sferu $S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ slika u sferu $S_2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

(54) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru data je prava $p : x_1 = t, x_2 = 1+t, x_3 = -2+t, x_4 = -t, t \in R$ i tačka $S(1,2,-1,0)$. Napisati formule preslikavanja koje predstavlja kompoziciju centralne simetrije sa centrom u tački S i simetrije u odnosu na pravu p.

(55) Odrediti afino preslikavanje ravni za koje su tačke $B(5,1)$ i $C(2,4)$ nepokretne i koje tačku $A(1,1)$ preslikava u centar kruga opisanog oko trougla ABC. Odrediti nepokretne tačke i nepokretne prave ovog preslikavanja.

(56) Dat je trougao ABC svojim temenima $A(1,0)$, $B(7,0)$ i $C(2,5)$. Neka su tačke D, A_1, B_1 i C_1 definisane na sledeći način: D je središte duži AB, A je središte duži A_1D, B je središte duži DB_1 i C_1 je središte duži CD. Napisati formule preslikavanja ravni koje tačke A, B i C preslikava redom u tačke A_1, B_1 i C_1. Izračunati zatim površinu elipse koja je slika kruga opisanog oko trougla ABC pri ovom preslikavanju.

(57) Date su tačke $A(1,4)$, $B(-3,0)$ i $C(3,0)$. Odrediti afino preslikavanje ravni Oxy koje temena B i C trougla ABC ostavlja nepokretnim, a teme A preslikava u središte stranice BC. Odrediti zatim sliku kruga opisanog oko trougla ABC pri ovom preslikavanju.

(58) Odrediti afino preslikavanje ravni koja tačke $A(1,2)$, $B(1,-1)$ i $C(2,4)$ redom preslikava u tačke $A_1(5,-1)$, $B_1(2,2)$ i $C_1(8,-2)$. Dobijenim preslikavanjem preslikati krug $x^2+y^2=1$, a zatim odrediti jednačinu geometrijskog mesta tačaka iz kojih su tangentne duži na ovaj krug i njegovu sliku međusobno jednake.

(59) Odrediti formule afinog preslikavanja ravni koja tačke $A(1,1)$, $B(1,2)$ i $C(2,3)$ redom preslikava u tačke $A_1(2,5)$, $B_1(3,7)$ i $C_1(5,11)$. Dobijenom transformacijom preslikati krug $x^2+y^2=1$.

(60) Odrediti formule afinog preslikavanja ravni tako da su prave $y=x$ i $y=1$ nepokretne i tačka $M(1,-1)$ se preslikava u tačku $M_1(7,3)$. Dobijenim preslikavanjem zatim preslikati oblast $\mathcal{D} = \{(x,y) | 4x^2 - 2xy + 10y^2 + 8x - 16y + 7 < 0,\ \frac{3}{2} < y < \frac{5}{2}\}$.

(61) U četvorodimenzionom euklidskom prostoru $\mathcal{E}^4$ data je prava $l: \ x_1 = 4+t,\ x_2 = 3+2t,\ x_3 = -3-t,\ x_4 = 7+3t,\ t \in \mathbb{R}$ i tačke $A(4,1,-1,-1)$, $B(-1,2,4,0)$ i $C(0,3,0,-2)$.

a) Odrediti tačku A_1 simetričnu tački A u odnosu na pravu l.

b) Odrediti jednačinu sfere čiji je centar tačka A_1 i koja sadrži težište trougla ABC.

(62) Odrediti formule preslikavanja u euklidskom prostoru $\mathcal{E}^3$ koje predstavlja ortogonalnu projekciju na ravan $2x+y+z=2$. Odrediti zatim temena elipse koja se dobija projektovanjem kruga $x^2+y^2=1$, $z=0$.

(63) Paralelna projekcija euklidskog prostora $\mathcal{E}^3 = Oxyz$ na ravan Oxy određena je projekcijom $M_1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0)$ tačke $M(0,0,1)$. Odrediti formule ove projekcije kao i projekciju elipse $y^2+2z^2=1$, $x=0$.