Увод у комплексну анализу - други тест **27.12.2012.**

Презиме и име, група ______________________________

1. Функцију $f(z) = \dfrac{1}{5z+2}$ представити Тејлоровим редом у диску са центром у $z = 2$ и назначити где важи развој.

$$f(z) = \frac{1}{5z+2} = \frac{1}{5(z-2)+12} = \frac{1}{12(1+\frac{5}{12}(z-2))} = \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^n}{12^n}(z-2)^n.$$

Развој важи када је $|\frac{5}{12}(z-2)| < 1$, тј. када је $|z-2| < \dfrac{12}{5}$.

2. Навести пример функције:
Примери су јако лаки и требало је потрудити се, па не "убости" тачан одговор. Нарочито то важи за делове под б) и в).

а) која има пол трећег реда у тачки $z = 5i$: $f(z) = \dfrac{1}{(z-5i)^3}$

б) која има коначно много чланова у регуларном делу Лорановог реда: $f(z) = z$

в) за коју је резидум у тачки $z = 1$ једнак нули : $f(z) = z^2$ (било која аналитичка функција и још много других)

3. Одредити све сингуларитете функције $f(z) = \dfrac{(z+2)\sin 2z}{(z^3+4z^2+4z)(z-3)}$, као и њихову врсту.

$f(z) = \dfrac{(z+2)\sin 2z}{z(z+2)^2(z-3)}$
$z = 0$ је отклоњиви сингуларитет,
$z = -2$ је пол првог реда,
$z = 3$ је пол првог реда.

4. Израчунати интеграл функције $f(z) = \dfrac{e^z}{z-2}$ по позитивно оријентисаној контури:

а) $|z| = 1$: $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z-2} = 0$, јер је функција аналитичка унутар ове контуре (КИТ).

б) $|z| = 3$:
$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z-2} = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=2} f = 2\pi i e^2$$

5. Решити једначину $\cos z = 3$.

$3 = \cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
$t^2 - 6t + 1 = 0$, где је $t = e^{iz}$
Решења квадратне једначине су $t_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ и $t_2 = 3 - 2\sqrt{2}$. Даље је $t_1 = e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$, односно $e^{-y}(\cos x + i\sin x) = 3 + 2\sqrt{2}$. Ако изједначимо модуле леве и десне стране, добићемо да је $e^{-y} = 3 + 2\sqrt{2}$, тј. $y = -\ln(3+2\sqrt{2})$, а онда је и $x = 2k\pi$, за $k \in \mathbb{Z}$. Аналогно за t_2.

6. Израчунати интеграл $\int_\gamma (2-i)(z^2-\overline{z})\mathrm{d}z$, где је γ негативно оријентисана кружница са центром у $z = 0$ полупречника $R = 2$.
Може да се рачуна "све редом", а може и да се скрати поступак: $\int_\gamma (2-i)(z^2-\overline{z})\mathrm{d}z = \{\text{ КИТ }\} =$

$$\int_\gamma (2-i)(-\overline{z})\mathrm{d}z = -(i-2)\int_0^{2\pi} 2e^{-it}2ie^{it}\mathrm{d}t = 8\pi(2i+1).$$ (параметризовали смо криву $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$)