MATEMATIČKO PROGRAMIRANJE I OPTIMIZACIJA
~ Vežbe ~

Marija Ivanović, Matematički fakultet,
Studentski trg 16/IV, 11000 Beograd, Srbija
Email: marijai@math.rs

Beograd, 2012.

Linearno programiranje

Neka je $A = [a_{ij}]_{mxn}$ matrica sa vrstama $V_1, V_2, \dots, V_m$ i neka su $b \in R^m$ i $c \in R^n$ dati vektori.

- **Opšti oblik linearnog programiranja je:**

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &V_i^T x = b_i,\ i \in I_1 \\ &V_i^T x \geq b_i,\ i \in I_2 \\ &V_i^T x \leq b_i,\ i \in I_3 \\ &x_i \geq 0, \quad j \in J \end{aligned} \tag{1}$$

gde su $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1, \dots, m\}$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$, $I_1 \cap I_3 = \varnothing$, $I_2 \cap I_3 = \varnothing$ i $J \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Dakle, tražimo najmanju vrednost funkcije cilja $f(x) = c^T x$ uz uslov da argumenti zadovoljavaju ograničenja definisana navedenim linearnim jednačinama i linearnim nejednačinama.

Problem linearnog programiranja smo mogli da zapišemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \min\Big\{\textstyle\sum_{j=1}^n c_j x_j \ | \\ &\textstyle\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \leq 0,\ i = 1,..,k, \\ &\textstyle\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \geq 0,\ i = k+1,..,s, \\ &\textstyle\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i = 0,\ i = s+1,..,m, \\ &x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\Big\} \end{aligned} \tag{1'}$$

- **Standardni oblik linearnog programiranja**

Ako svaku nejednačinu problema (1') zamenimo jednačinom, dobićemo standarni oblik linearnog programiranja. Zamena jednačina se vrši na sledeći način:

Jednačinu $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \leq 0,\ i = 1,..,k$ menjamo jednačinom $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} - b_i = 0$ za $x_{n+i} \geq 0$ ("dopunimo jednačinu do jednakosti"). Uvedena promenljiva x_{n+i} se naziva <u>izravnajuća promenljiva</u>.

Jednačinu $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \geq 0,\ i = k+1,..,s$ menjamo j-nom $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} - b_i = 0$ uz uslov $x_{n+i} \geq 0$.

Konačno početni problem dobija oblik:

$$\begin{aligned} \min\Big\{\textstyle\sum_{j=1}^{n''} c''_j\, x''_j \ | \\ &\textstyle\sum_{j=1}^{n''} a''_{ij}\, x''_j - b''_i = 0,\ i = 1,..,m'', \\ &x_1 \geq 0, \dots, x_{n''} \geq 0\Big\} \end{aligned} \tag{2}$$

Odnosno, ako u problemu (1) stavimo da je $I_1 = \{1,\dots,m\}, J = \{1,\dots,n\}$ tada se on svodi na standarni problem linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \qquad (2')$$

- **Simetrični oblik**

Svako ograničenje $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \leq 0,\ i = 1,..,k$ problema (1') se može pomnožiti sa -1 čime dobijamo ekvivalentno ograničenje $\sum_{j=1}^{n}(-a_{ij})x_j + b_i \geq 0$,

Svako ograničenje $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i = 0,\ i = s+1,\dots,m$ možemo ekvivalentno da zamenimo sa dve nejednačine $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \geq 0$ i $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \leq 0$.

Ako izvršimo opisane zamene tada problem (1') dobija oblik

$$\min\Big\{\sum_{j=1}^{n'} c'_j\, x'_j \mid \sum_{j=1}^{n''} a'_{ij}\, x'_j - b'_i \geq 0,\ i = 1,..,m',\quad x_1 \geq 0,\dots,x_{n'} \geq 0\Big\} \qquad (3)$$

koji nazivamo <u>simetričnim oblikom.</u>

Sa druge strane, ako u problemu (1) stavimo da je $I_2 = \{1,\dots,m\}, J = \{1,\dots,n\}$ dobijamo simetrični problem linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax \geq b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \qquad (3')$$

Vidimo da se problem u opštem obliku lako može transformisati u problem simetričnog ili standarnog oblika.

- **Dualnost u linearnom programiranju**

Posmatramo problem linearnog programiranja u simetričnom obliku:

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax \geq b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

A je matrica dimenzije m x n sa kolonama $K_1,\dots,K_n$ i neka je rangA=m. Problem (1') se naziva <u>primarni problem</u> i njemu odgovara <u>dualni problem</u> oblika:

$$\begin{aligned} &\max b^T y \\ &A^T y \leq c \end{aligned} \qquad (4')$$

Dualni problem možemo da transformišemo uvođenjem izjednačavajućih promenljivih:

$$\begin{aligned} &\max b^T y \\ &A^T y + z = c \qquad\qquad (4'') \\ &z \geq 0 \end{aligned}$$

Teorema (Slaba dualnost):
Za bilo koje dopustive tačke $(x_1, \ldots, x_n)$ i $(y_1, \ldots, y_m)$ problema (P) odnosno problema (D) važi:

$$c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \geq y_1 b_1 + \ldots + y_m b_m$$

Teorema (Jaka dualnost):
Ako jedan od problema (P) i (D) ima optimalno rešenje onda i drugi ima optimalno rešenje. Pri tom, za njihova optimalna rešenja važi:

$$c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = y_1 b_1 + \ldots + y_m b_m$$

Primer 1
Primarni problem

$$(P) \quad \begin{aligned} &\min(-x_1 - x_2) \\ &x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ &-x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ &x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Rešenje:

$$c^T = [-1 \ \ -1] \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow b^T = [1 \ \ 1] \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Dualni problem (D)

$$\begin{aligned} &\max(y_1 + y_2) \\ &y_1 - y_2 + z_1 = -1 \\ &-y_1 + y_2 - z_2 = -1 \\ &-y_1 + z_3 = 0 \\ &-y_2 + z_4 = 0 \\ &z \geq 0 \end{aligned}$$

Primer 2
Primarni problem

$$(P) \quad \begin{aligned} &\min(10x_1 + 5x_2 + 4x_3) \\ &3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 3 \\ &4x_1 + \quad + 2x_3 \geq 10 \\ &x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Dualni problem

$$(D) \quad \begin{aligned} &\max(3y_1 + 10y_2) \\ &3y_1 + 4y_2 \leq 10 \\ &2y_1 \leq 5 \\ &-3y_1 + 2y_2 \leq 4 \\ &y_i \geq 0 \end{aligned}$$

Primer 3

Primarni problem

$$
(P)\qquad
\begin{aligned}
&\max\left(12x_1 - 2x_2 - x_4\right)\\
&4x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 2x_4 \le 3\\
&-8x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \le 9\\
&-3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 7\\
&x_i \ge 0
\end{aligned}
$$

Dualni problem

$$
(D)\qquad
\begin{aligned}
&\min\left(3y_1 + 9y_2 + 7y_3\right)\\
&4y_1 - 8y_2 - 3y_3 \ge 0\\
&7y_1 + 2y_2 + 5y_3 \ge 12\\
&-4y_1 - y_2 + 2y_3 \ge -2\\
&-2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge -1\\
&y_i \ge 0
\end{aligned}
$$

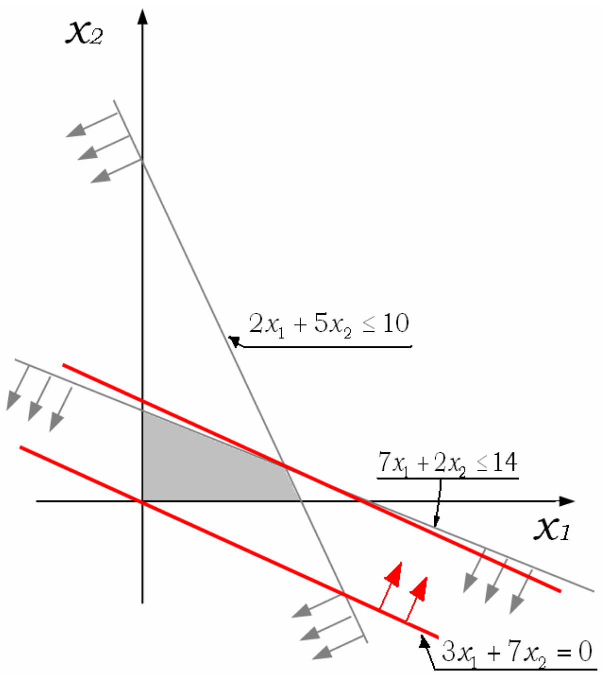
Linearni problem se može rešiti grafičkim putem.

Primer 4

$$
\begin{aligned}
&\max\left(3x_1 + 7x_2\right)\\
&2x_1 + 5x_2 \le 10\\
&7x_1 + 2x_2 \le 14\\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Rešenje:

Nacrtamo grafike ograničenja i osenčimo prostor na kome je funkcija definisana a zatim nacrtamo i samu funkciju (slika niže).



Zadaci za vežbu

1. Svesti na standardni oblik sledeće probleme linearnog programiranja:

a)
$$\begin{aligned} &\min(3x_1 - 2x_2) \\ &2x_1 - x_2 \geq 1 \\ &-x_1 + x_2 \geq 0 \\ &x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} &\min(x_1 - x_2) \\ &x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &-2x_1 + x_2 \geq -1 \\ &x_1 - x_2 \geq 3 \\ &x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Svesti na simetričan oblik sledeće probleme linearnog programiranja

a)
$$\begin{aligned} &\min(-x_1 - x_2 + x_3) \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ &x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \leq -2 \\ &x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} &\max(x_2 - x_3) \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ &x_1 \leq 5 \\ &x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

3. Naći dualne probleme problemima iz zadataka 1. i 2.

Metoda koja se najčešće koristi za rešavanje problema linearnog programiranja je simpleks metoda.

- Simplex metoda

Prvi je predložio Dantzig 1947.god.

Ideja simplex metode za rešavanje problema linearnog programiranja je u pretraživanju mogućih rešenja. Polazi se od jednog takvog rešenja i formira se niz sve boljih bazisno mogućih rešenja.

Simplex metoda ima više verzija, prvo ćemo koristiti tablični zapis simplex metode.

Rešavamo problem:

$$\min c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

uz pretpostavku da je *rangA=m*, tj sistem *Ax=b* je saglasan i ne sadrži suvišne jednačine.

Algoritam simplex metode

Korak0: Formirati simplex tablicu za zadati problem (LP tablicu).

Korak1: Postaviti brojač na nulu (k=0)
Proveriti da li je $c_j^k \geq 0$ za svako *j*, ako jeste preći na Korak6.

Korak2: Ako je za svako *j* $c_j^k < 0$ proveriti da li je i $a_{ij}^k \leq 0$.
Ako jeste preći na Korak7.

Korak3: Naći $r \in \{1,\dots,n\}$ za koje je $c_r^k < 0$. (r- pivotni, s-stožerni element)
Najčešće se uzima $c_r^k = \min\{c_a^k \mid a = 1,..,n\}$, $x = (x_1,\dots,x_n)$
Naći $s \in \{1,\dots,m\}$ takvo da je

$$\frac{b_s^k}{a_{sr}^k} = \min\left\{\frac{b_i^k}{a_{ir}^k} \mid a_{ir}^k \geq \right\}$$ i preći na Korak4

Korak4: Elementarnim transformacijama napraviti (*k+1*)-vu simplex tablicu, odnosno podeliti *s*-tu vrstu sa a_{sr}^k (a_{sr}^{k+1}=*1*) a ostalim vrstama dodati *s*-tu vrstu pomnoženu odgovarajućim koeficijentima tako da se dobije da je $a_{ir}^{k+1} = 0,\ i \neq s,\ c_r^{k+1} = 0$. Preći na Korak5.

Korak5: Zameniti *k* sa *k+1* i preći na Korak1.

Korak6: Bazično rešenje koje odgovara *k*-toj tablici je optimalno.
Vrednost funkcije je z_0^k. STOP

Korak7: Funkcije cilja je neograničena odozdo. STOP.

LP tablica je dimenzije $(n+1)\times(m+1)$.

z	C_1	c_2	...	...	c_n
b_1	A_{11}	a_{12}	...	...	a_{1n}
b_2	A_{21}	a_{22}			a_{2n}
	...				...
	...				...
b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	...	a_{mn}

- *rangA=m* : postoji *m* linearno nezavisnih kolona matrice. Svaki skup *m* linearno nezavisnih kolona se naziva bazom matrice A.

  Matrica A se sastoji iz *n* kolona K_i, $A=[K_1\ K_2\ \ldots\ K_n]$.

Neka su $A_B=\{K_{j1},\ldots,K_{jm}\}$ kolone koje čine bazu matrice, skup $B=\{j_1,.,j_m\}$ predstavlja indekse kolona koje čine bazu.

- Promenljive se nazivaju bazičnim promenljivim a ostale nebazičnim u odnosu na bazu A_B.

  Bazično rešenje se dobija kada se nebazične promenljive izjednače sa nulom i sistem *Ax=b* reši po bazičnim promenljivim.

- Polazni sistem možemo da zapišemo na sledeći način:

$$A_B x_B + A_N x_N = b$$

  gde su sa x_B označene bazične promenljive, a sa x_N nebazične promenljive.

  Pomnožimo celu formulu sa A_B^{-1}, dobićemo da je

$$x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b$$

  Ako izjednačimo nebazične promenljive sa nulom, polazni problem se svodi na problem

$$x_B^* = A_B^{-1} b,\ x_N^* = 0.$$

Primer 5

$$\min f(x),\ f(x) = -x_1 - 2x_2$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Rešenje:
Prvo uvodimo izjednačavajuće promenljive i svodimo problem na kanonski oblik:

$$\min f(x),\quad f(x) = -x_1 - 2x_2$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Odgovarajuća LP tablica je

0	-1	-2	0	0
1	-1	**1**	1	0
3	1	1	0	1

Iz uslova $r_2 = -2 < 0$ sledi da druga kolona može da uđe u bazu.. Imamo da je $1/1 < 3/1$ pa sledi da bazu napušta 4.kolona. Pivotiramo oko elemenata $a_{12} = 1$ dobijamo novu simplex tablicu:

2	-3	0	2	0
1	-1	1	1	0
2	**2**	0	-1	1

Kako je dalje $r_1 = -3 < 0$, pivotiranje oko $a_{21} = 2$ dobijamo:

5	0	0	1/2	3/2
2	0	1	1/2	1/2
1	1	0	-1/2	1/2

Optimalno rešenje je (1,2,0,0) a optimalna vrednost -5.

Primer 6

$$\max z,\ z = x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 + 3x_7$$
$$3x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 = 6$$
$$x_2 + 2x_3 - x_4 = 10$$
$$x_1 - x_6 = 0$$
$$x_3 + x_6 + x_7 = 6$$
$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 7$$

Rešenje:

Tražimo minimum funkcije $w = -z = -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + x_6 + 3x_7$ pri datim ograničenjima. Formiramo LP tablicu

0	*-1*	*1*	*-1*	*3*	*-1*	*1*	*3*
6	0	0	3	2	1	1	6
10	0	1	2	-1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	-1	0
6	0	0	1	0	0	1	1

Želimo da eliminišemo negativne vrednosti u "nultom" redu tablice.
Primetimo da tablica ima bazne kolone (I, II, IV i VII). Prvu vrstu pomnožimo sa 1 i dodamo je nultoj vrsti (dobijamo $c_5^0 = 0$). Isti postupak ponovimo sa trećom vrstom (dobićemo da je $c_1^0 = 0$). Drugu vrstu pomnožimo sa -1 i dodamo nultoj vrsti (rezultat je $c_2^0 = 0$), dok četvrtu vrstu množimo sa -3 ($c_7^0 = 0$). Kao rezultat dobijamo novu tablicu:

-22	*0*	*0*	*-3*	*6*	*0*	*-2*	*0*
6	0	0	3	2	1	1	6
10	0	1	2	-1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	-1	0
6	0	0	1	0	0	1	1

Bazično rešenje koje odgovara ovoj tablici je (0,10,0,0,6,0,6). Ovo rešenje nije optimalno (imamo negativnih vrednosti u nultoj vrsti). Primenjujemo korak4 iz algoritma za $s = 1$ i $r = 3$ i dobijamo drugu simplex tablicu.

-16	0	0	0	8	1	-1	0
2	0	0	1	2/3	1/3	1/3	0
6	0	1	0	-7/2	-2/3	-2/3	0
0	1	0	0	0	0	-1	0
4	0	0	0	-2/3	-1/3	2/3	1

Bazično rešenje koje odgovara ovoj tablici je (0,6,2,0,0,0,4) . Rešenje nije optimalno, primenom koraka 4 za $s = 4$, $r = 6$ dobijamo treću simplex tablicu

-10	0	0	0	7	1/2	0	3/2
0	0	0	1	1	1/2	0	-1/2
10	0	1	0	-3	-1	0	1
6	1	0	0	-1	-1/2	0	3/2
6	0	0	0	-1	-1/2	1	3/2

Bazično rešenje koje odgovara ovoj tablici je (6,10,0,0,6,0). Ovo rešenje je optimalno, optimalna vrednost funkcije w je 10.
Sledi da maksimalna vrednost funkcije z je -10.

Zadaci za vežbu:

1. Fabrika proizvodi 3 vrste paketa: A, B i C.
   Model A zahteva 8č obrade, 5č lakiranja i 6č sušenja.
   Model B zahteva 6č obrade, 4č lakiranja i 2č sušenja.
   Model C zahteva 5č obrade, 2č lakiranja i 4č sušenja.
   Stolar ima na raspolaganju ukupno 96č za obradu, 44č za lakiranje i 58č za sušenje. Zarada po jedinici modela A, B i C je 380eur, 260eur i 220 eur.
   Kojom će se kombinacijom proizvodnje postići maksimalna dobit?
   Formirati matematički model i rešiti problem.

Rešenje:

Matematički model za dati problem je sledećeg oblika:

$$\max\ 380x_1 + 260x_2 + 220x_3$$

$$p.o.\quad 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 96$$

$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 44$$

$$6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 58$$

Odgovarajuća LP tablica je:

	-380	-260	-220	0	0	0
96	8	6	5	1	0	0
44	5	4	2	0	1	0
58	6	2	4	0	0	1

Biramo $c_1^0 = -380 < 0$, dalje dobijamo $\frac{b_s}{a_{rs}} = \min\left\{\frac{96}{8}, \frac{44}{5}, \frac{58}{6}\right\} = 8.8\ (s = 2)$.

Uzimamo da je pivot a_{21} i elementarnim transformacijama anuliramo sve vrednosti u prvoj koloni.

Nova tablica, k=1:

3344	0	44	-68	0	76	0
25.6	0	-0.4	1.8	1	-0.2	0
8.8	1	0.8	0.4	0	0.2	0
5.2	0	-2.8	1.6	0	-1.2	1

Imamo da je $c_3^1 = -68 < 0$, $\frac{b_s}{a_{rs}} = \min\left\{\frac{25.6}{1.8}, \frac{8.8}{0.4}, \frac{5.2}{1.6}\right\} = 3.25\ (s = 3)$, pivot je a_{33}

k=2

3565	0	-75	0	0	25	42.5
19.75	0	2.75	0	1	1.15	-1.125
7.5	1	1.5	0	0	-0.06	-0.25
3.25	0	-1.75	1	0	-0.75	0.625

k=3

3940	50	0	0	0	22	30
6	-1.8333	0	0	1	1.26	-0.6667
5	0.6667	1	0	0	-0.04	-0.1667
12	1.1667	0	1	0	-0.82	0.3333

Dakle, rešenje problema je (A,B,C)=(0,5,12), očekivana zarada iznosi 3940eur.

2. Rešiti sledeći problem simpleks metodom:

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + 3x_2 \\ p.o.\ & 4x_1 + 5x_2 \leq 16 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Hint: Uvesti izjednačavajuće promenljive. Optimalno rešenje je (3/2,2) a vrednost funkcije iznosi 9.

3. Rešiti sledeći problem simpleks metodom:

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 \\ p.o.\ & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Optimalno rešenje je (4,4) a vrednost funkcije iznosi 20.

4. Rešiti sledeći problem simpleks metodom:

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ p.o.\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ & 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 50 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Optimalno rešenje je (5,0,3) a vrednost funkcije iznosi 20.

Dvofazna modifikacija simplex metode

Dat je problem linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax = b \qquad\qquad (1) \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Ako je poznata jedna dopustiva baza, problem se svodi na kanonski oblik i odgovara simpleks metodi koju smo ranije radili. Cilj ovog postupka je da pomoću simplex metode rešimo problem koji nema poznatu bazu.

Pretpostavimo da je $b \geq 0$ (ako nije pomnožimo sve jednačine sa -1). Uočavamo pomoćni problem linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} &\min e^T w \\ &Ax + w = b \qquad\qquad (2) \\ &x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

gde je $e = (1, \ldots, 1) \in R^m$, $w \in R^m$ (w je vektor veštačkih promenljivih).

Skup dopustivih rešenja problema (2) je neprazan, i funkcija cilja je ograničena nulom odozdo.

Algoritam modifikacije dvofazne simplex metode

I Faza:

Za problem (1) formiramo problem (2) kome se pridružuje LP tablica.

LP-tablica se svodi na simplx tablicu eleminacijom nula iz nulte vrste a zatim se prelazi na algoritam za rešavanje simplex metode.

Kako je funkcija cilja ograničena odozdo razlikujemo dva slučaja:

1. Optimalna vrednost je veća od nule. Tada problem (1) nema dopustivih rešenja I postupak se završava.
2. Optimalna vrednost je jednaka nuli (sledi da su u optimalnom baznom dopustivom rešenju sve veštačke promenljive jednake nuli). Prelazi se na II fazu.

II Faza

Korak1: Iz poslednje simplex tablice dobijene u I fazi uklanjaju se sve veštačke promenljive, a nulta vrsta se zamenjuje vrstom $[0|c_1 \ldots c_n\ 0 \ldots 0]$ koja ima *n+k+1* element, pri čemu je *k* broj bazičnih promenljivih. Dobijena LP tablica se svodi na simplex tablicu eliminacijom onih $c_j \neq 0$ koji odgovaraju bazičnim promenljivim.

Korak2: Ukoliko je k=0 ići na korak3.

U suprotnom u simplex tablici postoje bazične kolone koje odgovaraju veštačkim promenljivim. Uočimo jednu od njih, koja npr. odgovara veštačkoj promenljivoj w_s. Neka ta kolona sadrži jedinicu u vrsti *v*. Razlikujemo dva slučaja:

1. Svi elementi vrste *v* osim bazične su jednaki nuli. Tada se vrsta *v* i kolona koja odgovara promenljivoj w_s izostavljaju iz simpex tablice
2. Neka je osim bazične jedinice na primer *r*-ti element vrste *v* različit od nule. Tada je i $r \neq 0$ jer je w_s na nivou nula, i tada *r*-ta kolona odgovara veštačkoj promenljivoj jer su izostavljene sve kolone koje odgovaraju nebazičnim promenljivim. Pomoću stožerne transformacije, sa stožernim elementom u preseku vrste *v* i kolone *r* , učiniti *r*-tu kolonu bazičnom. Zatim, izostaviti kolonu koja odgovara promenljivoj w_s jer se radi o nebazičnoj koloni koja odgovara veštačkoj promenljivoj. Zameniti *k* sa *k+1* I preći na korak 2.

Korak3: Dobijena simplex tablica sadrži samo kolone koje odgovaraju promenljivim iz problema (1). Primeniti algoritam za simplex kanonsku metodu.

Primer 7

$$\min f(x), \quad f(x) = 2x_1 + 3x_3 + x_4$$

$$p.o. \quad \begin{array}{rrrrcl} & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & & +2x_3 & +4x_4 & = & 12 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 3 \\ & & & x_i & \geq & 0 \quad i = 1,2,3,4 \end{array}$$

Rešenje:

Problem nije u kanonskom obliku, zato primenjujemo fazu I:

rešavamo pomoćni (pridruženi) problem, *min* w

$$\min w(x), \quad w(x) = x_5 + x_6 + x_7$$

$$p.o. \quad \begin{array}{rrrrrrrcl} & -x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & & & = & 3 \\ 2x_1 & & +2x_3 & +4x_4 & & +x_6 & & = & 12 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & + & & +x_7 & = & 3 \\ & & & & & x_i & & \geq & 0 \quad i = 1,\ldots,7 \end{array}$$

Problemu *min* w odgovara LP tablica:

Z		C1	c2	...				cn
0		0	0	0	0	1	1	1
b1	3	0	-1	-1	1	1	0	0
b2	12	2	0	2	4	0	1	0
b3	3	1	1	2	1	0	0	1

Faza1:
Želimo da eliminišemo jedinice koje se nalaze u funkciji cilja:
I, II I III vrstu pomnožimo sa -1 i dodamo funkciji cilja. Ovim postupkom dobijamo novu tablicu na koju primenjujemo simpleks algoritam.

k=0

0	0	0	0	0	1	1	1
3	0	-1	-1	1	1	0	0
12	2	0	2	4	0	1	0
3	1	1	2	1	0	0	1

k=1
s = 3
r = 4

-18	-3	0	-3	-6	0	0	0
3	0	-1	-1	1	1	0	0
12	2	0	2	4	0	1	0
3	1	1	2	1	0	0	1

k=2

0	3	6	9	0	0	0	6
0	-1	-2	-3	0	1	0	-1
0	-2	-4	-6	0	0	1	-4
3	1	1	2	1	0	0	1

U funkciji cilja više nemamo negativnih vrednosti, dakle (0,0,0,3,0,0,0) je optimalno rešenje. Optimalna vrednost funkcije w je nula pa prelazimo na drugu fazu.

II Faza
Poslednja kolona iz tablice je nebazična, odgovara veštačkoj promenljivoj i zato je uklanjamo (korak1).

0	2	0	3	1	0	0
0	-1	-2	-3	0	1	0
0	-2	-4	-6	0	0	1
3	1	1	2	1	0	0

U funkciji cilja uz baznu promenljivu x_4 se nalazi 1 koju hoćemo da eliminišemo.

-3	1	-1	1	0	0	0
0	-1	-2	-3	0	1	0
0	-2	-4	-6	0	0	1
3	1	1	2	1	0	0

Eliminišemo zatim, promenljivu x_5 koja je veštačka i umesto nje prvu kolonu učinimo bazičnom (korak3, slučaj2). Dobijamo novu tablicu:

Promenljiva x_5 je veštačka a svi preostali elementi druge vrste su jednaki nuli, izostavljamo zato II vrstu i kolonu koja odgovara toj promenljivoj (x_5), dakle brišemo V kolonu (korak3, slučaj1). Dobijena simplex tablica je:

-3	0	-3	-2	0	1	0
0	1	2	3	0	-1	0
0	0	0	0	0	-2	1
3	0	-1	-1	1	1	0

-3	0	-3	-2	0	0
0	1	2	3	0	0
0	0	0	0	0	1
3	0	-1	-1	1	0

-3	0	-3	-2	0
0	1	2	3	0
3	0	-1	-1	1

Kako su eleminisane sve veštačke promenljive možemo preći na korak 4.
Dobijamo simplex tablicu:

-3	3/2	0	5/2	0
0	1/2	1	3/2	0
3	1/2	0	1/2	1

Bazično rešenje koje odgovara ovoj tablici je (0,0,0,3) i ono je optimalno. Optimalna vrednost funkcije z je 3.

Napomena: U pretposlednjoj i poslednjoj simplex tablici odgovara isto bazično rešenje pa samim tim i ista funkcija cilja. Ovo je posledica degenerisanosti, tj. prisustvo nula u poslednjoj koloni.

Zadaci za vežbu:

1. Rešiti dvofaznom modifikacijom simpleks metode sledeće probleme linearnog programiranja

a)

$$\begin{aligned} &\min\ 2x_1 - 3x_2 \\ &2x_1 - x_2 - x_3 \geq 3 \\ &x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ &x_i \geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} &\min\ x_1 + 2x_2 \\ &5x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ &x_1 + x_2 \geq 1 \\ &-3x_1 + x_2 \leq 3 \\ &-3x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ &x_i \geq 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} &\max\ 5x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4 + 7x_5 \\ &3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ &x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ &2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7 \\ &x_i \geq .0 \end{aligned}$$

Dualna simplex metoda

Dat je problem linearnog programiranja:

$$\min c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Kome odgovara LP tablica

$-Z_0$	c_1	c_2	...	...	c_n
b_1	a_{11}	a_{12}	...	...	a_{1n}
b_2	a_{21}	a_{22}			a_{2n}
	...				...
	...				...
b_m	A_{m1}	a_{m2}	...	...	a_{mn}

Tablicu nazivamo *dualnom simplex tablicom* ako ona među kolonama 1,...,n sadrži m različitih baznih kolona i važi . Ukoliko je ispunjeno $c_1 \geq 0, \ldots, c_n \geq 0$ i $b_1 \geq 0, \ldots, b_n \geq 0$ onda je dualana simplex tablica istovremeno i simplex tablica pa ja odgovarajuće dopustivo rešenje takođe optimalno.

<u>Dualna simplex metoda</u>

Korak0: Staviti da je k=0. K-ta iteracija se dobija na sledeći način.

Korak1: Ispitati da li je $b_i^k \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$. Ako jeste preći na korak6.

Korak2: Za svako *i* za koje je $b_j^k < 0$ ispitati da li je $a_{ij} \geq 0$ za sve *j = 1,...n.*

Ako takvo b_j^k postoji preći na korak 7.

Korak3: Odrediti $s \in \{1, \ldots, m\}$ za koje je $b_s^k < 0$. Naći $r \in \{1, \ldots, n\}$ takvo da je

$$\frac{c_r^k}{a_{sr}^k} = \max\left\{\frac{c_j^k}{a_{sj}^k} \mid a_{sj}^k < 0\right\}$$

Korak4: Dobiti (k+1)-vu dualnu simplex tablicu sledećim elem. transformacijama *k*-te dualne simplex tablice:

Podeliti *s*-tu vrstu sa a_{sr}^k. Ostalim vrstama, uključujći i prvu, dodati *s*-tu vrstu pomnoženu odgovarajućim koeficijentima tako da se dobije $a_{ir}^{k+1} = 0$ za $i \neq s$ i $c_r^{k+1} = 0$.

Korak5: Zameniti k sa k+1 i preći na korak1.

Korak6: Dobijena dualna simplex tablica je ujedno i simplex tablica. Bazično rešenje koje joj odgovara je optimalno, vrednost funkcije cilja je z_0^k. STOP.

Korak7: Skup dopustivih rešenja posmatranog problema je prazan. STOP.

Primer 8

$$\min f(x), \quad f(x) = 9x_1 + x_2 + x_3$$

$$p.o. \quad \begin{array}{rrrrl} 3x_1 & -x_2 & & +2x_3 & \geq -1 \\ 4x_1 & +2x_2 & -x_3 & & \geq 5 \\ & & & x_i & \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{array}$$

Rešenje:
Uvodimo izjednačavajuće promenljive i svodimo problem na kanonski oblik.
Dobijamo problem:

$$\min z, \quad z = 9x_1 + x_2 + x_3$$

$$p.o. \quad \begin{array}{rrrrrrl} -3x_1 & +x_2 & & -2x_3 & +x_4 & & = 1 \\ -4x_1 & -2x_2 & +x_3 & & & +x_5 & = -5 \\ & & & & & x_i & \geq 0 \quad i = 1,\dots,6 \end{array}$$

Novom problemu odgovara dualna simplex tablica

0	9	1	1	0	0
1	-3	1	-2	1	0
-5	-4	-2	1	0	1

Primenimo algoritam za dualni simplex:

-5/2	7	0	3/2	0	1/2
-3/2	-5	0	-3/2	1	1/2
5/2	2	1	-1/2	0	-1/2

Dobijena tablica nije simplex tablica. Nastavljamo sa primenom algoritma:

-4	2	0	0	1	0
1	10/3	0	1	-2/3	-1/3
3	11/3	1	0	-1/3	-2/3

Dobijena tablica jeste simplex tablica. Bazično dopustivo rešenje koje joj odgovara je (0,3,1,0,0) a optimalna vrednost funkcije z je 4.

Zadaci za vežbu

1. Reštiti dualnom simplex metodom

$$\min \; x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_1 - x_2 - 4x_3 \leq 1$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 0$$

$$x_i \geq 0$$

2. Dva tipa proizvoda, A i B, mogu se izrađivati na dva tipa mašina, P i Q. Mašina P može da proizvede 4 jedinice proizvoda A i 3 jedinice proizvoda B na sat. Mašina Q može da proizvede 1 jedinicu proizvoda A i 4 jedinice proizvoda B na sat. Troškovi eksploatacije mašine P su 17, a mašine Q 14 novčanih jedinica na sat. Preduzeću je neophodno najmanje 7 jedinica proizvoda A i 15 jedinica proizvoda B. Koliko sati rada svake mašine je neophodno da bi zahtevi preduzeća bili zadovoljeni i da bi troškovi eksploatacije bili minimalni?

Rešenje:
Promenljive x_1 i x_2 predstavljaju brojeve sati rada mašina P i Q respektivno.
Matematički model problema:

$$\text{Min} \quad \begin{array}{c} f(x_1, x_2) = 17x_1 + 14x_2 \\ 4x_1 + x_2 \geq 7 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

3. Proizvodno preduzeće raspolaže sa 3 vrste sirovina: od prve ima 120, od druge 80 i od treće 240 jedinica. Sirovine se koriste za izradu 5 vrsta proizvoda. Pri izradi jedinice prvog proizvoda potroše se jedna jedinica prve, dve jedinice druge i četiri jedinice treće sirovine. Pri izradi jedinice drugog proizvoda potroše se pet jedinica druge i jedna jedinica treće sirovine. Pri izradi jedinice trećeg proizvoda potroše se četiri jedinice prve, dve jedinice druge i pet jedinica treće sirovine. Pri izradi jedinice četvrtog proizvoda potroše se dve jedinice prve i jedna jedinica druge sirovine. Pri izradi jedinice petog proizvoda potroše se četiri jedinice prve i četiri jedinice treće sirovine. Jedinicu prvog proizvoda preduzeće prodaje po 20, drugog po 10, trećeg po 40, četvrtog po 20 i petog po 15 novčanih jedinica. Kako preduzeće treba planirati proizvodnju da bi od prodaje imalo najveći prihod?

~ NEKI MATEMATIČKI MODELI ~

Zadatak 1 ***ZAŠTO BRZIM KADA MOŽE PUTNIČKIM ?***

Pretpostavimo da sa perona železničke stanice u Beogradu polaze putnički i brzi voz. Kompozicija brzog voza pored poštanskog vagona ima 5 vagona II razreda, 6 vagona I razreda i 4 spavaća kola. Putnički voz obavezno ima poštanski vagon, teretni vagon, 8 vagona II, 4 vagona I razreda i jedna spavaća kola. Na peronu se nalazi 12 poštanskih, 8 teretnih, 81 vagon II reda i 70 vagona I razreda, kao i 27 kola za spavanje. Ako u jedan vagon II razreda stane 58 putnika, a u jedan vagon I razreda stane 40, a u spavaća kola 32 putnika, koliko kompozicija brzog, a koliko kompozicija putničkih vozova treba sastaviti kako bi oni prevezli maksimalan broj putnika?

Zadatak 2 ***OPASNE SUPSTANCE NA PUTU ☺***

Iz gradova A i B polaze kolone od po 100 kamiona. Obzirom da kamioni prevoze opasne supstance, u pratnji kolone koja polazi iz grada A, pored pomenutih vozila ide jedno vozilo milicije, dva vozila AMSS i dva motora. Sa druge strane, koloni koja polazi iz grada B pridružuju se dva vozila milicije i jedno vozilo AMSS (nema motora u drugoj koloni). Kamioni koji polaze iz grada A, prevoze najviše 3000t supstanci, dok kolona koja polazi iz grada B prevoze najviše 2500t susptanci. Firma, koja je ovaj prevoz organizovala, ima na raspolaganju ukupno 1000 kamiona i 14 motora. Milicija pomaže sa svojih 16 vozila, koliko iznosi i broj vozila AMSSa. Koliko je kolona moguće formirati u svakom gradu tako da prevoz tereta bude maksimalan?

Zadatak 3 ***LUKAVA BAKA***

U jednom selu u Srbiji baka Persa pravi najbolju pitu. Baka Persa je toliko poznata da se njena pita prodaje i u obližnjim gradovima. Obzirom da se pita prodaje u nekoliko obližnjih prodavnica baka je morala da angažuje svog unuka Peru za prevoz pita i obećala mu da neće raditi više od 6.5h dnevno. Da bi obišao jedan deo grada, Peri će trebati najmanje 1.1h vremena, dok mu je za drugi deo grada potrebno 1.4h. Pera je odlučio da podvali baki, pa svoje vreme organizuje tako da uvek završi sat vremena ranije, a kako za sat vremena ne može da obiđe ni jedan deo grada onda može da ode sa posla. Baka Persa se pita da li Pera može drugačije da se organizuje pa da njegovo vreme na poslu bude maksimalno iskorišćeno.

Zadatak 4 ***VELIKA I MALA PREDUZEĆA***

Jedna fabrika tokom jednog godišnjeg kvartala troši 9000l visokooktanskog, 12000l niskooktanskog benzina i 26000l diesel goriva. Fabrika ima svega dva dobavljača. Prvi dobavljač uz trošak od 3000 dinara dnevno može dostaviti 100l visokooktanskog, 300l niskooktanskog benzina i 400l diesela, dok drugi dobavljač za 2000 dinara dnevno dostavlja redom po 200, 100 i 300 litara potrebnog goriva. Koliko dana treba angažovati prvog, odnosno drugog dobavljača pa da tako troškovi dostave budu minimalni a potražnja za gorivom zadovoljena?

Zadatak 5 ***ZAŠTO SRBIJA NEMA MORE?***

Potrebno je uvesti trajektnu liniju koja bi dnevno, u oba smera, mogla prevesti barem 3000 automobila, a ne bi potrošlia dnevnu zalihu od 1200l goriva. Na raspolaganju su dva tipa trajekta. Veći, koji u jednom smeru može da preveze 200 automobila, potroši 30l goriva i za pun kapacitet zaradi 800eur i manji, koji u jednom smeru potroši 40l goriva, može da preveze 160 automobila sa maksimalnom zaradom od 650eur. Ako bi u proseku veći trajekt tokom jednog dana napravio ukupno 10 vožnji, a manji 8, da li treba promeniti taj odnos kako bi troškovi bili što manji? Obavezno izračunati dnevnu zaradu.

Zadatak 6 ***PIPI I GUDI***

Indutrija za preradu mesna je angažovala jedno transportno preduzeće da im prevozi robu od fabrike do prodavnica. Roba koja treba da se prenese se sastoji iz 900 kubnih jedinica kvarljive robe i 1200 kubnih jedinica nekvarljive robe, a za prevoz može angažovati dva tipa vozila. Transportna firma raspolaže sa dva tipa vozila sledećih kapaciteta:

- Vozilo sa 30 kubnih jedinica hladnjače i 30 kubnih jedinica običnog prostora

- Vozilo sa 20 kubnih jedinica hladnjače i 40 kubnih jedinica običnog prostora

Koliko vozila prvog tipa a koliko vozila drugog tipa naša industrija treba da angažuje kako bi ukupni troškovi prevoza bili minimalni ako se zna da su troškovi eksploatacije po kilometru za prvi tip vozila 50 din, odnosno za drugi tip 40din.

Zadatak 7 ***POSLASTIČARNICA "ŠEĆER"***

Poslastičarnica šećer je na poslednjem skupu poslastičara osvojila zlatnu nagradu za svoje svadbene torte i sitne kolače. Da bi se torte i sitni kolači napravili, poslastičarnica koristi četiri stroja. Raspoloživo vreme na strojevima je redom: 16, 10, 16 i 12 sati. Za obradu svake torte na strojevima treba raditi redom: 2,2,4 i 0 sati, dok za sitnih kolača treba po 4,1,0 i 4 sata. Ako jedna torta košta 20eur a 1kg sitnih kolača 15 eur, koju vrstu svojih proizvoda Šećer treba više da proizvodi kako bi ostvario maksimalnu dobit?

Zadatak 8 ***MALA I VELIKA PREDUZEĆA***

Ikea je odlučila da dođe u Srbiju. Kako trenutno nema kapaciteta za svoje skladište i svoje fabrike, sarađivaće sa Simpom i Kikom. Radnici Simpa i Kike će sklapati nameštaj, dok će isti biti izloženi u Ikeinim salonima. Simpo će sklapati 10 000 artikla, dok će Kika sklapati samo 5 000 artikla. Za sada, Ikea ima salone u Beogradu, Novom Sadu i Nišu. Izložbeni saloni su kapaciteta 4 000, 8 000 i 3 000 artikla. Cene prevoza po artiklu date su tablično. Odrediti plan transporta sa minimanlnim troškovima i izračunati te troškove.

	Beograd	Novi Sad	Niš
Simpo	3eur	3eur	2eur
Kika	6eur	5eur	1eur

Zadatak 9 ***GDE IMA DIMA IMA I VATRE***

Vatrogasna stanica je odlučila da unapredi svoje poslovanje i da tom prilikom nabavi avione za gašenje požara. Na tržištu su avioni nosivosti 25t po ceni od 4 miliona eur, zatim nosivosti od 20t po ceni od 3 miliona eur i nosivosti od 40t sa cenom od 5 miliona eur. Procenjeno je da u slučaju velikih požara u istom trenutku treba imati bar 240t vode. U garaži vatrogasne stanice staje najviše 8 aviona. Napraviti plan kupovine koji će zahtevati što manje troškove.

Zadatak 10 ***MOŽDA SRBIJA NEMA MORE, ALI BRODOGRADILIŠTE?***

Brodogradilište u Beogradu gradi brodove od 500, 600 i 800 Brt. Za izgradnju takvih brodova treba 6, 9 i 15 meseci. Brodogradilište ima na raspolaganju jedan slobodan dok. Naručeno je 10 brodova koji zajedno treba da imaju preko 5600Brt. Napravite plan izgradnje brodova kojim će se brodovi isporučiti za što kraće vreme.

Zadatak 11 ***SELIDBE***

Agencija za transport robe ima vozila nosivosti 10, 5 i 3t i 10 vozača. Treba preseliti sve stanare jedne zgrade, odnosno 70t robe u isto vreme. Kako prevesti robu tako da potrošnja goriva bude minimalna, ako najveći kamion troši 20l na 100km, srednji 16l na 100km a najmanji 10l na 100km.

Zadatak 12 ***ŠTO JE TEŠKO KADA SI VLASNIK RESTORANA***

U jednom pretsižnom restoranu, u okviru novogodišnje proslave, stolovi su postavljeni tako da za njima može sesti 4oro, 6oro ili 8oro ljudi. Organizacija večere za četvoro košta 800eur, za 6oro 900eur a večere za stolom za osmoro ljudi košta 1000eur. Očekuje se da će na proslavi biti najmanje 240 gostiju. Vlasnik restorana planira da investira najviše 45000 eura u organizaciju čitave proslave. Ako je u startu nabavljeno 20 stolova za 4 osobe, koliko još stolova treba nabaviti, i kog tipa, tako da restoran može da primi što je moguće više gostiju.

Zadatak 13 ***KAKO SE REKLAMIRATI ZA MALE PARE***

Trgovačko preduzeće ima na raspolaganju 25 000 dinara koje namerava da potroši na TV reklamu. Spot od 30s emitovan od 7:00 do 18:00 košta 1100 din i ima 15 000 potencijalnih gledalaca. Spot od 30s emitovan u terminima od 18:00 do 23:00 košta 2200 dinara i ima 25 000 potencijalnih gledalaca, dok 30s u vremenu od 23:00 do 02:00 po ceni od 1400 dinara ima 18 000 potencijalnih gledatelja. TV stanica radi zasićenosti neče emitovati više od 15 spotova u svim terminima zajedno. Napisati linearni program optimalnog reklamiranja u svrhu maksmiziranja broja potencijalnih kupaca koji će videti spotove.

Zadatak 14 ***NE RADIM NIŠTA, IMAM NEKRETNINE***

Iznajmljivanje apartmana od 40m2 vlasniku donosi prihod od 6.25eur po m2, apartman od 50m2 donosi zaradu od 6eur po m2, dok pri najmu apartmana od 80m2 prihod je 5eur po m2, sve za jedan mesec iznajmljivanja. Pretpostavimo da jedan čovek može istovremeno da iznajmljuje najviše 10 malih apartmana, 18 srednjih i 5 velikih apartmana mesečno. U dogovoru sa građevinskom firmom želimo da napravimo 14 apartmana ukupne korisne površine ne više od 1000m2. Koje apartmane treba graditi tako da nam njihovo iznajmljivanje bude najisplativije? Kolika je dobit njihovog iznajmljivanja u jednoj sezoni ako ona traje godinu dana?

Zadatak 15 ***AUTO PARK***

U auto parku imamo sledeće vrste kamiona:

nosivost	ukupna težina	broj kamiona
5t	7.5t	5
3t	4.5t	6
8t	12t	4

Dobit po jednoj prevezenoj toni na kamionu od 5t nosivosti iznosi 30 eur, na kamionu nosivosti 3t dobit po toni je 25 eur dok je jedna tona prevežena na najvećem kamionu 40 eur. Napraviti konvoj od 12 kamiona tako da ukupna dobit koju će transport doneti bude najveća. Kakav je sastav konvoja, ako njegova ukupna težina ne prelazi 120t? Izračunati najveću moguću dobit.

Zadatak 16 ***PONOVO VOZ ĆIRA***

Kompozicija noćnog voza ima jedna spavaća kola i bar dva vagona I razreda dok si svi ostali vagoni II razreda. Spavaća kola primaju 30 putnika, vagon I razreda 60 putnika, vagon II razreda po 90 putnika. Mora se složiti kompozicija za bar 600 putnika. Trošak spavaćih kola iznosi 40eur na noć, vagona I razreda košta 25 eur noć dok vagon II razreda košta 10eur po jednoj noći. Kako sastaviti kompoziciju koja može primiti očekivani broj putnika a da ima najmanje troškove?

Zadatak 17 ***PROTIV VAZDUŠNA ODBRANA***

Potrebno je sastaviti tim protiv vazdušne odbrane (PVO). Poznato je da protivnik raspolaže sa 100 aviona za napade sa malih visina, 150 aviona za napade sa srednjih visina i 100 aviona za napade sa velikih visina, ali se ne zna sa koje će visine izvoditi napade. Mogu se osigurati dva tipa raketa. Prvi tip obara avione sa verovatnoćama 75%, 50% i 25%, a drugi tip sa verovatnoćama 25%, 50% i 75%, u zavisnosti od toga da li napadaju sa male, srednje ili velike visine. Prvi tip raketa košta 2500 eur dok je drugi duplo skuplji. Koliko kojih raketa je neophodno osigurati tako da očekivan broj oborenih aviona ne bude manji od broja aviona koji mogu izvršiti napad? Troškove nabavke svesti na minimum.

Šta bi se dogodilo da se zahtev broja obaranja aviona sa srednjih visina smanji za jedan?
Šta bi se dogodilo da se zahtev broja obaranja aviona sa velikih visina smanji za jedan?
Zadatak rešiti dualom i diskutovati dualne promenljive.

Zadatak 18 ***FABRIKA***

Fabrika proizvod dva proizvoda, P1 i P2 na tri grupe strojeva S1, S2 i S3. Prve dvije grupe kapaciteta su po 1 500, a treća 1 800 radnih sati. Prvi proizvod koristi 5 sati kapaciteta prve, 7.5 sati druge i 3 sata i 20 minuta treće grupe strojeva, dok proizvod P2 koristi redom 6h; 4h i 9 sati kapaciteta svake grupe strojeva. Ako dobit po P1 iznosi 30eur, a dobit po P2 50eur, isplanirati proizvodnju. Izračunati iskoristivost pojedinih grupa strojeva i uticaj profita na planiranje proizvodnje.

Za koliko treba da naraste profit prvog proizvoda, da bi se promienio plan proizvodnje?

Zadatak 19 ***VITAMINI***

Tri tipa vitamina A, B i C mogu se kupiti u četiri tipa tableta P, Q, R i S. Prva tableta sadrži po 1 jedinicu prvog i trećeg vitamina; druga sadrži 1 jedinicu drugog i 2 jedinice trećeg vitamina; treća sadrži 1 jedinicu prvog i 2 jedinice drugog vitamina; četrvta sadrži 1 jedinicu prvog, 2 jedinice drugog i 1 jedinicu trećeg vitamina. Prva tableta stoji 10, druga 30, treća 40 i četvrta 60 dinara. Želi se nabaviti najmanje 2 jedinice prvog, 5 jedinica drugog i 4 jedinice trećeg vitamina. Koliko se tableta svakoga tipa mora nabaviti da bi se zadovoljile potrebe za vitaminima i da bi troškovi nabavke bili najmanji?

Zadatak 20 ***POTROŠAČKA KORPA***

Svakodnevna ishrana treba da sadrži najmanje q_i sastojaka, i=1,2,…,m. Na raspolaganju se nalaze namernice j, j=1,2,…,n koje sadrže a_{ij} sastojaka *i* i koštaju c_j po jedinici mase. Sastaviti najjeftiniju ishranu.

Zadatak 21 ***RASPOREĐIVANJE RESURSA***

Dato je n poslova i m ljudi i korist c_{ij} koju i-ti čovek $i=1,2,\ldots,m$ ostvaruje radeći na poslu j, $j=1,2\ldots,n$. Rasporediti ljude na poslove tako da i-ti čovek radi a_i poslova, $i=1,2,\ldots,m$ a b_j lica radi na poslu j, $j=1,2,\ldots,n$ i pritom se ostvaruje maksimalna ukupna korist.

Zadatak 22 ***PREBIJANJE DUGOVA***

Lice i, $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ duguje licu j $j \in \{1,2,\ldots,m\} \setminus \{i\}$ svotu d_{ij}. Napisati matematički model za prebijanje dugova, tj. za minimizaciju ukupnog dugovanja bez promene bilansa pojedinačnih lica.

Zadatak 23 **ZIMSKA GUMA OBAVEZNA**

Koliko najviše kilometara može da pređe auto koji ima pet novih guma ako svaka guma može da pređe 40000km na pogonskom i 60000 kilometara na nepogonskom točku? Pdrediti plan zamene guma kojim se ostvaruje maksimalna kilometraža.