Испит 01.09.2022. МНЛ

Данијел Алексић

Јануар 2023.

Задатак 1. *За густину расподеле обележја X важи да је*

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} x^{-\frac{1+\theta}{\theta}}, \;\; x > 1, \; \theta > 0.$$

Ако за параметар α важи да је $\alpha = \mathbf{E}(\log\sqrt{X})$, на основу узорка обима n, одредити оцену максималне веродостојности параметра α и испитати њену ефикасност и постојаност.

Решење. Прво ћемо наћи везу параметара α и θ тако што ћемо наћи $\mathbf{E}(\log\sqrt{X})$. За то нам ваља наћи његову расподелу. Кад је $x > 1$, онда је $\log\sqrt{x} > 0$, па је носач за $\log\sqrt{X}$ интервал $[0,\infty)$. Нека је зато $x \in [0,\infty)$. Рачунамо да је

$$\begin{aligned}
F_{\log\sqrt{X}}(x) &= \mathbf{P}\{\log\sqrt{X} \le x\} \\
&= \mathbf{P}\big\{X \le e^{2x}\big\} \\
&= \int_1^{e^{2x}} \frac{1}{\theta} t^{-\frac{1+\theta}{\theta}} dt \\
&= \frac{1}{\theta} \frac{t^{-\frac{1+\theta}{\theta}+1}}{-\frac{1+\theta}{\theta}+1}\Bigg|_1^{e^{2x}} \\
&= \frac{1}{\theta} \frac{t^{-\frac{1}{\theta}}}{-\frac{1}{\theta}}\Bigg|_1^{e^{2x}} \\
&= -t^{-\frac{1}{\theta}}\Big|_1^{e^{2x}} \\
&= -\left(e^{-\frac{2}{\theta}x} - 1\right) \\
&= 1 - e^{-\frac{2}{\theta}x}.
\end{aligned}$$

Одавде препознајемо да је $\log\sqrt{X} \sim \mathcal{E}\left(\frac{2}{\theta}\right)$, па је $\alpha = 1/(2/\theta) = \theta/2$. Оцена максималне веродостојности за α биће половина оцене максималне веродостојности за θ, па ћемо њу и срачунати. Имамо да је функција веродостојности дата са

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta} x_k^{-\frac{1+\theta}{\theta}} \\
&= \frac{1}{\theta^n}\left(\prod_k x_k\right)^{-\frac{1+\theta}{\theta}},
\end{aligned}$$

па је

$$\log L(\theta) = -n\log\theta - \frac{1+\theta}{\theta}\sum_k \log x_k.$$

Сада постављамо једначину веродостојности:

$$0 = \frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta)$$

$$= -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_k \log x_k.$$

Добија се решење

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log X_k.$$

Конвенционалним методама показујемо да јесте реч о максимуму, па имамо оцену максималне веродостојности за θ. Као и малопре за логаритам корена, идентичним рачуном покаже се да $\log X \sim \mathcal{E}(1/\theta)$, па му је очекивање коначно и једнако θ. Стога важи слаби закон великих бројева, па оцена $\hat{\theta}$ јесте постојана. Отуда је постојана и оцена за α као њена половина.

Сада треба испитати ефикасност оцене. За то нам треба њена дисперзија и доња граница Рао-Крамера, а за ово друго информациона функција Фишера. Како су α и θ скаларни умножак једно другог, све што буде важило за једно важиће и за друго, па ћемо радити само са оценом за θ. Срачунајмо прво дисперзију.

$$\mathbf{D}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n^2}\mathbf{D}\sum_k \log X_k = \frac{1}{n^2}\sum_k \mathbf{D}\log X_k = \frac{1}{n^2}\sum_k \theta^2 = \frac{\theta^2}{n}.$$

Да се срачунати да је

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta) = \frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\ln x,$$

па је

$$I(\theta) = \mathbf{E}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X;\theta)\right) = \mathbf{E}\left(\frac{2}{\theta^3}\ln X - \frac{1}{\theta^2}\right) = \frac{1}{\theta^2}.$$

Доња граница једнака је $1/(nI(\theta))$, односно баш дисперзији $\frac{\theta^2}{n}$, па оцена јесте ефикасна.

Задатак 2. *Истраживач је на основу узорка обима* 8 *тестирао хипотезу* H_0*(обележје* X *има биномну* $\mathcal{B}(2,p)$ *расподелу), где је* p *познато, против хипотезе* H_1*(обележје* X *има Пуасонову* $\mathcal{P}(1)$ *расподелу) користећи критичну област* W*, за коју важи да је* $W = \left\{\sum\limits_{k=1}^{8} x_k \leq c\right\}$*. При томе је добио да је вероватноћа грешке прве врсте* 0.05*, а вероватноћа грешке друге врсте* 0.00823*. Одредити вредност параметра* p *који је користио при израчунавању.*

Решење. Прво ћемо искористити податак који нам је дат за грешку друге врсте: да она износи 0.00823. Наиме, грешка друге врсте представља вероватноћу да не одбацимо нулту хипотезу онда када треба, при тачној алтернативи. Тада сваки од наших осам елемената узорка има $\mathcal{P}(1)$ расподелу, па, како су независне, њихов збир има $\mathcal{P}(8)$ расподелу. Тада, дакле, имамо

$$0.00823 = \mathbf{P}\{\mathcal{P}(8) > c\} = 1 - \mathbf{P}\{\mathcal{P}(8) \leq c\}.$$

Из таблице за функцију расподеле Пуасонове расподеле није тешко „провалити" да је реч о $c = 15$. Дакле, сада знамо да је наша критична област облика

$$W = \left\{\sum_{k=1}^{8} x_k \leq 15\right\}.$$

Даље, сваки од елемената X_j узорка има биномну расподелу, па се може записати као $X_j = I_{j1} + I_{j2}$, где су оба индикатора независна са вероватноћом успеха p. Кад се посабирају, добијамо да је $\sum_{k=1}^{8} X_k \sim \mathcal{B}(16,p)$, па за вероватноћу грешке прве врсте имамо

$$0.05 = \mathbf{P}\Big\{\mathcal{B}(16,p) \leq 15\Big\} = 1 - \mathbf{P}\Big\{\mathcal{B}(16,p) > 15\Big\} = 1 - \mathbf{P}\Big\{\mathcal{B}(16,p) = 16\Big\},$$

па добијамо да је

$$0.05 = 1 - \binom{16}{16}p^{16}(1-p)^{16-16} = 1 - p^{16},$$

па је $p^{16} = 0.95$, па је $p = \sqrt[16]{0.95}$.

Задатак 3. *За густину општег члана низа случајних величина* (X_n) *важи да је* $f_{X_n}(x) = \frac{7^n}{(7^{2n}-1)x^2}$, $x \in [7^{-n}, 7^n]$. *Ако је* $Y_n = 7^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} I\{X_n < 1\} + X_n I\{X_n \geq 1\}$, *испитати средње квадратну конвергенцију низа случајних величина* (Y_n).

Решење. За почетак, срачунајмо

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\{X_n < 1\} &= \int_{7^{-n}}^{1} \frac{7^n}{(7^{2n}-1)x^2} dx \\
&= \frac{7^n}{(7^{2n}-1)} \int_{7^{-n}}^{1} x^{-2} dx \\
&= \frac{7^n}{(7^{2n}-1)} \frac{x^{-1}}{-1}\bigg|_{7^{-n}}^{1} \\
&= \frac{-7^n}{(7^{2n}-1)} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{7^{-n}}\right) \\
&= \frac{-7^n}{(7^{2n}-1)} (1 - 7^n) \\
&= \frac{7^n(7^n-1)}{(7^{2n}-1)} \\
&= \frac{7^n(7^n-1)}{(7^n-1)(7^n+1)} \\
&= \frac{7^n}{7^n+1}.
\end{aligned}
$$

Отуда имамо

$$
\mathbf{P}\{X_n \geq 1\} = \frac{1}{7^n+1}.
$$

Сада ћемо срачунати

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_n I\{X_n \geq 1\}) &= \int_{7^{-n}}^{7^n} x I\{x \geq 1\} \frac{7^n}{(7^{2n}-1)x^2} dx \\
&= \int_{1}^{7^n} \frac{7^n}{(7^{2n}-1)x} dx \\
&= \frac{7^n}{(7^{2n}-1)} \int_{1}^{7^n} \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{n 7^n \ln 7}{7^{2n}-1} \\
&\to 0, \ n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Након тога, рачунамо,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(7^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} I\{X_n < 1\}\right) &= 7^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} \mathbf{P}\{X_n < 1\} \\
&= 7^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} \frac{7^n}{7^n+1} \\
&\to \frac{1}{7}.
\end{aligned}
$$

Следи да $\mathbf{E}(Y_n) \to 1/7$. Даље, како је квадрат индикатора тај исти индикатор, имамо

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left((X_n I\{X_n \geq 1\})^2\right) &= \mathbf{E}\left(X_n^2 I\{X_n \geq 1\}\right) \\
&= \int_{7^{-n}}^{7^n} x^2 I\{x \geq 1\} \frac{7^n}{(7^{2n}-1)x^2} dx \\
&= \int_{1}^{7^n} \frac{7^n}{(7^{2n}-1)} dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{7^n}{(7^{2n}-1)} \int_1^{7^n} dx \\
&= \frac{7^{2n}-7^n}{7^{2n}-1} \\
&\to 1,\ n \to \infty,
\end{aligned}
$$

а имамо и

$$\mathbf{E}\left(\left(7^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} I\{X_n < 1\}\right)^2\right) = 7^{-2\left(1+\frac{1}{n}\right)} \mathbf{P}\{X_n < 1\} = 7^{-2\left(1+\frac{1}{n}\right)} \frac{7^n}{7^n+1} \to \frac{1}{7^2}.$$

Даље рачунамо да је

$$Y_n^2 = (X_n I\{X_n \geq 1\})^2 + \left(7^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} I\{X_n < 1\}\right)^2 + 2X_n I\{X_n \geq 1\} 7^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} I\{X_n < 1\},$$

односно

$$Y_n = (X_n I\{X_n \geq 1\})^2 + \left(7^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} I\{X_n < 1\}\right)^2 + 2X_n 7^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} I\{X_n < 1, X_n \geq 1\},$$

те како је последњи индикатор нула, цео тај сабирак нестаје. Сада, пошто имамо спремне све сабирке, можемо добити да $\mathbf{E}(Y_n^2) \to 1 + \frac{1}{7^2}$. Нека је $x \in [7^{-n}, 7^n]$. Рачунамо да је

$$
\begin{aligned}
F_{X_n}(x) &= \int_{7^{-n}}^{x} \frac{7^n}{(7^{2n}-1)t^2} dt \\
&= \cdots \\
&= \frac{7^{2n}}{7^{2n}-1} - \frac{1}{x}\frac{7^n}{7^{2n}-1} \\
&\to 1.
\end{aligned}
$$

Даље је

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < 7^{-n} \\ \frac{7^{2n}}{7^{2n}-1} - \frac{1}{x}\frac{7^n}{7^{2n}-1}, & 7^{-n} \leq x < 7^n \\ 1, & x \geq 7^n, \end{cases}$$

што, при $n \to \infty$ тежи тачка по тачка функцији

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

што је функција расподеле јединице (дегенерисане случајне величине која је константно једнака 1). Даље је

$$
\begin{aligned}
F_{Y_n}(x) &= \mathbf{P}\{Y_n \leq x\} \\
&= \mathbf{P}\{7^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} I\{X_n < 1\} + X_n I\{X_n \geq 1\} \leq x\} \\
&= \mathbf{P}\{7^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} I\{X_n < 1\} + X_n I\{X_n \geq 1\} \leq x, X_n < 1\} \\
&\qquad + \mathbf{P}\{7^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} I\{X_n < 1\} + X_n I\{X_n \geq 1\} \leq x, X_n \geq 1\} \\
&= \mathbf{P}\{7^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leq x, X_n < 1\} + \mathbf{P}\{X_n \leq x, X_n \geq 1\} \\
&= \begin{cases} 0, & x < 7^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ \mathbf{P}\{X_n < 1\}, & 7^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leq x < 1 \\ \mathbf{P}\{X_n < 1\} + \mathbf{P}\{1 \leq X_n \leq x\}, & x \geq 1 \end{cases} \\
&\to \begin{cases} 0, & x < 1/7 \\ F(1), & 1/7 \leq x < 1 \\ F(1) + F(x) - F(1), & x \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 1/7 \\ 1, & x \geq 1/7, \end{cases}$$

што је расподела дегенерисане случајне величине увек једнаке $1/7$. Дакле, $Y_n \xrightarrow{D} 1/7$, па ако ичему тежи у средњеквадратном, мора да тежи ка $1/7$. Проверимо.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_n - 1/7)^2 &= \mathbf{E}(Y_n^2) - \frac{2}{7}\mathbf{E}(Y_n) + \frac{1}{7^2} \\ &\to 1 + \frac{1}{7^2} - \frac{2}{7}\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

што није нула. Дакле, једино што је преостало као потенцијални кандидат за низ Y_n у смислу средњеквадратног лимеса била је $1/7$. Како му Y_n не тежи у средњеквадратном, констатујемо да низ (Y_n) не конвергира у средњеквадратном.