Јануар 1: решење трећег задатка

petak, 19. januar 2024.   18:36

3. Случајна величина X има тзв. Кошијеву расподелу, тј. њена функција густине је

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (a,b).$$

(а) Одредити границе интервала (a,b). Кратко образложити.

(б) Да ли Кошијева расподела има очекивање и дисперзију? Ако има - израчунати их, а ако нема, образложити зашто нема.

(в) Доказати да $\mathbf{P}\{X < x\} + \mathbf{P}\{X < 1/x\}$ не зависи од x. *Хинт: Користити технике диференцијалног рачуна за показивање константности.*

(г) Да ли је случајна величина X са Кошијевом расподелом погодна за моделовање цене неке вредносне хартије. Кратко дискутовати. *Хинт: Вратити се на део (а).*

(а) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1$$

$$\Rightarrow (a,b) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

(б) $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\frac{x}{1+x^2}\,dx = +\infty,$$ јер је $\frac{x}{1+x^2} \sim \frac{1}{x}$, а његов интеграл дивергира. $D(X) \nexists$ јер $\nexists$ $E(X)$.

(в) $$F(x) = P\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} t\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$$

свеједно јер је $P\{X = x\} = 0$

$$P\{X < \tfrac{1}{x}\} = F(\tfrac{1}{x}) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}.$$

$$P\{X < x\} + P\{X < \tfrac{1}{x}\} = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)$$

$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) = 0$ (диференцијални рачун), па је посматрана функција константна.

(г) Не може, јер цена не може бити негативна, а X може!