

Домаћи задатак из Теорије информације

8. мај 2022.

Домаћи задатак носи 7 поена (3+4). Рок за израду је онај дан када први пут изађете на писмени испит. Дакле, уколико желите поене са домаћег, треба само да га предате пре него што изађете на испит, како би се знало колико имате поена на домаћем пре прегледања самог испита.

Дозвољено је (а вероватно и неопходно) „гуглање”, као и позивање на доказане ствари у литератури.

ЗАДАТАК 1.

а) Нека је $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. Показати да су све функције $H = H(p_1, \dots, p_N)$ такве да задовољавају следеће:

- H је адитивна;
- Ако важи $p_i = \frac{1}{N}$, H је монотono растућа функција;
- H је непрекидна у тачкама p_1, \dots, p_N ,

заправо неодређености облика

$$-\sum_{i=1}^N p_i \log_K p_i,$$

где је K произвољна константа.

б) Показати да је

$$H(p_1, \dots, p_N) = \lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{1}{1 - \eta} \log \left(\sum_{i=1}^N p_i^\eta \right). \quad (1)$$

в) Показати да је

$$H(p_1, \dots, p_N) = \lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{1 - \sum_{i=1}^N p_i^\eta}{1 - \eta}. \quad (2)$$

г) Испитати дефинисаност израза 1 и 2 за разне η и емпиријски проверити за бар две дискретне расподеле резултате из б) и в).

ЗАДАТАК 2. Лексикографски кодови (лексикодови) дефинишу се индуктивно на начин да реч припада лексикоду уколико се не преклапа са претходним кодним речима у неком смислу. Код дефинишемо тако што дефинишемо шта значи преклапање. Дефинишемо лексикодове са минималним растојањем S_d тако што кажемо да се две речи преклапају уколико је Хамингово растојање између њих мање или једнако d . Уколико су речи разних дужина, краћу реч допунимо водећим нулама. Веће нуле, по правилу, не пишемо. Означавамо са $S_{n,d}$ код који се састоји од свих кодних речи дужине n или мање.

Примера ради, код минималног растојања $S_{4,3}$ састоји се од речи дужине највише 4 за које важи да је минимално Хамингово растојање између речи бар 3, тј. свих речи које које задовољавају правила:

- Све речи дужине три су облика XXX;

- Све речи дужине четири су речи које немају исте две од три последње цифре (да не би било преклапања са речима дужине три). Такође, никоје две цифре нове речи не могу се поклапати са претходним речима дужине четири, тј. ниједна реч дужине четири не може се поклапати у тачно две цифре;
- Нема речи дужине два и један.

Ова правила нам помажу да конструишемо код :

$$0, 111, 222, 333, \dots, 999, 1012, 1103, 1230, 1321, 1456, \dots$$

Показати следећи резултат:

- а) S_d је линеарни код.
 б) S_d има базу облика (x_1, x_2, \dots) , где је

$$\begin{aligned} x_1 &= 1a_{1,1}a_{1,2} \cdots a_{1,d-1}, \\ x_2 &= 10a_{2,1}a_{2,2} \cdots a_{2,d-1}, \\ &\vdots \\ x_i &= 10 \dots 0a_{i,1}a_{i,2} \cdots a_{i,d-1}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

при чему важи да величине $a_{i,j}$ не зависе од d .