

Domaći zadatak

Uvod u teorijsku mehaniku 2023/2024.

Napomena: Domaći rad nosi ukupno **10 poena**. Rok za predaju je **zaključno sa 28. decembrom 2023.**

Zadaci

1. Odrediti vektor položaja i vektor brzine u paraboličnim koordinatama (ξ, η, φ) ako su date transformacije:

$$\begin{aligned}x &= \xi\eta \cos \varphi \\y &= \xi\eta \sin \varphi \\z &= \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2\end{aligned}$$

gde $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$ i $\varphi \in [0, 2\pi)$.

2. Elektron naelektrisanja $q = -e$ se kreće u homogenom magnetnom polju oblika $\vec{B} = B\vec{e}_z$, $B = \text{const.}$ Tada na česticu deluje Lorencova sila oblika $\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$. Pred toga, na njega deluje električno polje oblika $\vec{E} = E\vec{e}_y$, $E = \text{const.}$ U trenutku $t = 0$ elektron se nalazi u koordinatnom početku i poseduje brzinu $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$, $v_0 = \text{const.}$ Pokazati da je kretanje elektrona opisano jednačinama cikloide:

$$\begin{aligned}x(t) &= a \sin \omega t + bt \\y(t) &= a(1 - \cos \omega t) \\z(t) &= 0\end{aligned}$$

gde su a i b odgovarajuće konstante, a $\omega = \frac{eB}{m}$.

3. Glatka prava žica se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω u horizontalnoj ravni oko vertikalne ose koja preseca žicu u jednoj tački. Na rastojanju b od ose se nalazi centar privlačne sile koja je proporcionalna rastojanju:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k(r - b)\vec{e}_r$$

gde je k konstanta. Čestica mase m se kreće po glatkoj žici i na nju deluje pomenuta sila. Naći jednačine kretanja čestice.

4. Telo mase m_1 klizi niz glatku kružnu površinu poluprečnika krivine a tela mase m_2 koje se slobodno kreće u horizontalnom pravcu. Koristiti $(X, \varphi$ i $r)$ date na slici kao generalisane koordinate. Naći jednačine kretanja za svaku od koordinata koristeći metod Lagranževih množitelja, a potom odrediti $\lambda(\varphi)$. Pokazati da za $m_2 \gg m_1$ važi:

$$\lambda(\varphi) = -3m_1g \sin \varphi$$

