

## Osnovi mehanike - vežbe 9

26. april 2022.

1. Primenom Ojler-Kromerove metode odrediti putanju kosmičke letelice koja je sa Zemlje lansirana početnim geocentričnim brzinama od 0 do 10km/s (sa korakom od 1km/s), u pravcu i smeru Zemljine heliocentrične orbite. Pretpostaviti da se Zemlja kreće po kružnoj putanji oko Sunca. Uzeti u obzir samo gravitaciju Sunca i vršiti integraciju za jednu julijansku godinu.

a) Koristiti konstantni vremenski korak, kao i sa promenljivi korak obrnuto srazmeran ubrzanju. Pri-  
kazati odnos vremena integracije u funkciji početne brzine za oba slučaja;

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import time

M = 1.989e30 # masa Sunca
R = 6.378e6 # radijus Zemlje
gama = 6.67e-11 # gravitaciona konstanta
aj = 1.496e11 # astronomska jedinica
T = 365.25 * 24 * 60 * 60 # broj sekundi u julijanskoj godini

v_zemlja = 2 * np.pi * aj / T

V0 = np.arange(0,10000., 1000)
odnos=[] #odnos trajanja integracija
dt0 = 100.

for v0 in V0:

    ##### konstantan korak

    # pocetni uslovi
    pocetak = time.time()
    x = [aj]
    y = [0]
    vx = 0
    vy = v_zemlja + v0

    t = 0.
    dt = dt0
    while t < T:
        t += dt

        ax = -gama * M / (x[-1]**2 + y[-1]**2)**(3/2) * x[-1]
        ay = -gama * M / (x[-1]**2 + y[-1]**2)**(3/2) * y[-1]

        vx += ax * dt
        vy += ay * dt

        x.append(x[-1] + vx * dt)
        y.append(y[-1] + vy * dt)

    x = np.array(x)
    y = np.array(y)

    trajanje_k = time.time() - pocetak

    ##### promenljivi korak

    pocetak = time.time()
```

```

# pocetni uslovi
xp = [aj]
yp = [0]
vx = 0
vy = v_zemlja + v0

t = 0
while t < T:
    dt = dt0 * (xp[-1] ** 2 + yp[-1] ** 2)**0.5 / aj
    # probati sa np.sqrt umesto **0.5
    t += dt

    ax = -gama * M / (xp[-1] ** 2 + yp[-1] ** 2) ** (3 / 2) * xp[-1]
    ay = -gama * M / (xp[-1] ** 2 + yp[-1] ** 2) ** (3 / 2) * yp[-1]

    vx += ax * dt
    vy += ay * dt

    xp.append(xp[-1] + vx * dt)
    yp.append(yp[-1] + vy * dt)

xp = np.array(xp)
yp = np.array(yp)

trajanje_p = time.time() - pocetak

odnos.append(trajanje_k / trajanje_p)

# plt.plot(x / aj, y / aj)
# plt.plot(xp / aj, yp / aj, 'r')
# plt.plot(0, 0, 'oy', label='Sunce')
# plt.axis('equal')
# plt.show()

print(odnos)

```

b) Kako se menja moment količine kretanja letelice u odnosu na heliocentar za slučaj  $v_0=10\text{km/s}$ ?

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

M = 1.989e30 # masa Sunca
R = 6.378e6 # radijus Zemlje
gama = 6.67e-11 # gravitaciona konstanta
aj = 1.496e11 # astronomska jedinica

T = 31557600.0 # broj sekundi u julijanskoj godini

v_zemlja = 2 * np.pi * aj / T

v0=10000

dt = 100.

# pocetni uslovi

x = [aj]
y = [0]
vx = [0]
vy = [v_zemlja + v0]

```

```

L=[np.cross([x[-1], y[-1]], [vx[-1], vy[-1]])]

t = 0.

while t < T:
    t += dt

    ax = -gama * M / (x[-1]**2 + y[-1]**2)**(3/2) * x[-1]
    ay = -gama * M / (x[-1]**2 + y[-1]**2)**(3/2) * y[-1]

    vx.append(vx[-1]+ax * dt)
    vy.append(vy[-1]+ay * dt)

    x.append(x[-1] + vx[-1] * dt)
    y.append(y[-1] + vy[-1] * dt)

    L.append(np.cross([x[-1], y[-1]], [vx[-1], vy[-1]]))

print(L[0], L[300]/L[0], L[-1]/L[0])

```

### Zadaci koji se rešavaju analitički

2. Biciklista vozi bicikl ubrzanjem  $a = bt^2$  počevši iz stanja mirovanja. U trenutku polaska bicikliste, na rastojanju  $d$  od njega bačena je lopta vertikalno u vis brzinom  $v_0$ . Odrediti parametar  $b$  takav da biciklista uhvati loptu u trenutku kada ona padne na Zemlju.

**Rešenje:**  $\frac{3}{4} \frac{dg^4}{v_0^4}$

3. Bacač kugle izbacuje kuglu brzinom  $v_0$  pod uglom  $\alpha$ . Kojim konstantnim ubrzanjem bacač treba da trči da bi uhvatio kuglu uoči pada na tlo?

**Rešenje:**  $a = g \cotg(\alpha)$