* Писмени испит из Анализе 3 (и смер) – Септембар 1

1\. Дата је ф-ја $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5-3xy^4}{(x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+2y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

а) Испитати непр. ф-је f на $\mathbb{R}^2$.

б) Одредити парцијалне изводе ф-је f у $(0,0)$.

в) Испитати диф. ф-је f на $\mathbb{R}^2$.

Решење: а) ф-ја f је непрекидна на $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ као композиција непрекидних ф-ја.
Треба испитати непр. у $(0,0)$, тј. да ли је:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0.$$

Имамо:

$$0\le\left|\frac{x^5-3xy^4}{(x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+2y^2}}\right|\le\frac{|x^5|}{(x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+2y^2}}+\frac{3|x|y^4}{(x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+2y^2}}$$

$$=\frac{|x|\,x^2x^2}{\left((y-\frac{1}{2}x)^2+\frac{3}{4}x^2\right)\sqrt{x^2+2y^2}}+\frac{3|x|\,y^2\cdot y^2}{\left((x-\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2\right)\sqrt{x^2+2y^2}}$$

$$\le\frac{x^2x^2}{(y-\frac{1}{2}x)^2+\frac{3}{4}x^2}+\frac{3y^2y^2}{(x-\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2}$$

$$\le\frac{x^2x^2}{\frac{3}{4}x^2}+\frac{3y^2y^2}{\frac{3}{4}y^2}$$

$$=\frac{4}{3}x^2+4y^2 \quad /\lim_{(x,y)\to(0,0)}$$

$$\Rightarrow\ 0\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{4}{3}x^2+4y^2\right)=0$$

$\Rightarrow$ (т. о два полицајца) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|=0$ па је и $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$

$\Rightarrow$ ф-ја је непр. у $(0,0)$

$\Rightarrow$ ф-ја је непр. на $\mathbb{R}^2$

б) Парцијални изводи ф-је f у тачки $(0,0)$, по дефиницији:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^5}{h^2|h|}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2}{|h|}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{h}-0}{h}=0$$

в) ф-ја f је диф. на $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ као композиција диф. ф-ја.
Треба испитати диф. у $(0,0)$. Занима нас да ли важи:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-f'_x(0,0)h-f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{?}{=}0$$

Имамо

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-f'_x(0,0)h-f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\underbrace{\frac{h^5-3hk^4}{(h^2-hk+k^2)\sqrt{h^2+2k^2}\sqrt{h^2+k^2}}}_{g(h,k)}$$

$$0\le|g(h,k)|\le\frac{|h|\,|h|\,|h|\,h^2}{\left((k-\frac{1}{2}h)^2+\frac{3}{4}h^2\right)\sqrt{h^2+2k^2}\sqrt{h^2+k^2}}+\frac{3|h|k^4}{\left((h-\frac{1}{2}k)^2+\frac{3}{4}k^2\right)\sqrt{h^2+2k^2}\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\le\frac{|h|h^2}{(k-\frac{h}{2})^2+\frac{3}{4}h^2}+\frac{3|k|k^2}{(h-\frac{1}{2}k)^2+\frac{3}{4}k^2}\le\frac{|h|h^2}{\frac{3}{4}h^2}+\frac{3|k|k^2}{\frac{3}{4}k^2}$$

Scanned with CamScanner

⇒ $0 \le |g(h,k)| \le \frac{4}{3}|h| + 4|k| \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$

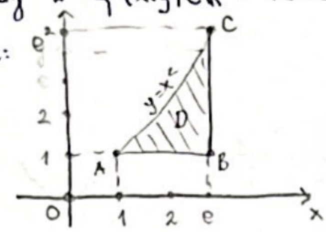
⇒ (т. о два полицајца) $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} |g(h,k)| = 0$ па и $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} g(h,k) = 0$

→ фја f је диф. у $(0,0)$

⇒ фја f је диф. на $\mathbb{R}^2$

2. Нека је фја $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ задата са $f(x,y)=x^2y\ln x$. Одредити најмању и највећу вредност фје f на скупу $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le e,\ 1\le y\le x^2\}$.

Решење:



D је компактан (јер је затворен и ограничен)
f је непр. је на $\mathbb{R}^2$ па и на D
} $\xrightarrow{\text{Вајер.}}$ f достиже min и max на скупу D (4п)

кандидати: 1° стац. тачке int D
2° стац. тачке ∂D
3° „Ћошкови" $A(1,1)$, $B(e,1)$, $C(e,e^2)$ (3п)

$\boxed{1}$ стационарне тачке int D:

Коментар: да би фја f била добро деф $\underline{x>0}$

(4п) $\nabla f=\vec{0}$: $f'_x = 2xy\ln x + xy = xy(2\ln x+1)=0$

$f'_y = x^2\ln x = 0$

$y=0 \ \lor\ 2\ln x+1=0 \ \lor\ x=1$

$x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ $\quad y=0$

$\to \frac{1}{e}\ln\frac{1}{\sqrt{e}} \ne 0$

→ Тачка $(1,0)$ је једина стационарна тачка али не припада области D.

$\boxed{2}$ стац. тачке ∂D.

- Граница области D се састоји од дужи $[AB]=\{(x,1): x\in[1,e]\}$, дужи $[B,C]=\{(e,y): y\in[1,e^2]\}$ и линије $l=\{(x,x^2): x\in[1,e]\}$ одређене фјом $x\mapsto x^2$.

(4п) дуж AB: $y=1,\ x\in[1,e]$

$f(x,1)= x^2\ln x = g_1(x)$

$g_1'(x)= 2x\ln x + x = x(2\ln x+1)>0$ за $x\in[1,e]$

→ g_1 је растућа на $[1,e]$ ⇒ $g^1_{min}=g(1)=0$

$g^1_{max}=g(e)=e^2$

(4п) дуж BC: $x=e,\ y\in[1,e^2]$

$f(e,y)=e^2y=g_2(y)$

$g_2'(y)=e^2>0$ → растућа фја

⇒ $g^2_{min}=g_2(1)=e$, $g^2_{max}=g_2(e^2)=e^4$

(4п) линија l: $f(x,y)=f(x,x^2)=x^4\ln x=\varphi(x)$, $x\in[1,e]$

$\varphi'(x)=4x^3\ln x + x^3\ln x = x^3(4\ln x+1)>0$ за $x\in[1,e]$

→ φ је растућа фја ⇒ $\varphi_{min}=\varphi(1)=0$

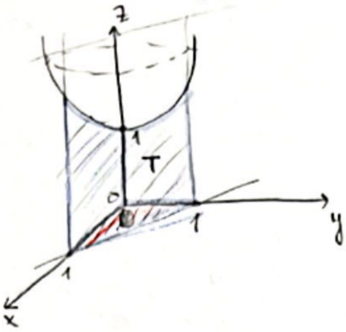
$\varphi_{max}=\varphi(e)=e^4$

⇒ нема мањих вредности него што је у тачки A и нема већих вредности него што је у тачки C ⇒ $\boxed{\min\limits_D f = f(A)=0,\ \max\limits_D f = f(C)=e^4}$ (2п.)

Scanned with CamScanner

3. Нека је T просторна област ограничена координатним равнима и површима $S_1: x+y=1$ и $S_2: z=2x^2+y^2+1$. Израчунати интеграл $I=\iiint\limits_T y\,dx\,dy\,dz$.

Решење:



$S_1: x+y=1$ – раван паралелна z-оси

$S_2: z=2x^2+y^2+1$ – елиптички параболоид који сече z-осу у тачки $(0,0,1)$, па за све тачке $(x,y,z)\in S_2$ важи $z\geq 1$

Пројекција области T на xy-раван је:

D: $0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x$

Имајући у виду ј-ну површи S_2, област T има опис:

T: $0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x,\ 0\leq z\leq 2x^2+y^2+1$

Превођењем тројног на троструки интеграл добијамо:

$$I=\iiint\limits_T y\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2x^2+y^2+1} y\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x} y(2x^2+y^2+1)\,dy\,dx=\int_0^1\left((2x^2+1)\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}+\frac{y^4}{4}\Big|_0^{1-x}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left((2x^2+1)\frac{(1-x)^2}{2}+\frac{(1-x)^4}{4}\right)dx=\frac12\int_0^1\left((1+2x^2)(1-2x+x^2)+\frac12(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)\right)dx$$

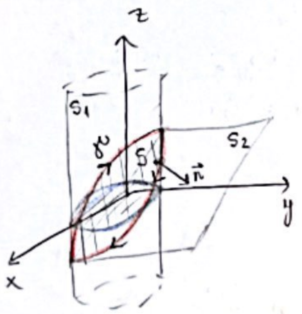
$$=\frac12\int_0^1\left(1-2x+x^2+2x^2-4x^3+2x^4+\frac12-2x+3x^2-2x^3+\frac12x^4\right)dx$$

$$=\frac14\int_0^1(3-8x+12x^2-12x^3+5x^4)\,dx$$

$$=\frac14\left(3x-4x^2+4x^3-3x^4+x^5\right)\Big|_0^1=\boxed{\frac14}$$

4. Израчунати интеграл $I=\oint\limits_\gamma (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, где је крива γ пресек површи $S_1: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=\frac{x}{2}+\frac{y}{4}$ и $S_2: \frac{x}{2}+z=1$. Крива γ је негативно оријентисана посматрано са позитивног дела z-осе.

Решење:



Површ S_1 је цилиндрична са изводницама паралелним z-оси, а S_2 је раван паралелна y-оси.

Пројекција криве γ на xy-раван је елипса:

$$\gamma_{xy}:\ \frac{(x-1)^2}{\left(\frac{2}{\sqrt2}\right)^2}+\frac{(y-2)^2}{\left(\frac{4}{\sqrt2}\right)^2}=1$$

Прелазимо на површински интеграл помоћу Стоксове теореме.

S- изаберимо да буде део равни S_2 ограничен кривом γ

Изаберимо да S буде ориј. сагласно γ $\longrightarrow$ задатој ориј. криве γ одговара страна површи S која се види са негативног дела z-осе

Стоксова ф-ла: $I=\oint\limits_\gamma F\cdot dr=\iint\limits_S(\nabla\times F)\cdot\vec{dS}$

$F(x,y,z)=(y-z,\ z-x,\ x-y)$

$\nabla\times F=(R'_y-Q'_z,\ P'_z-R'_x,\ Q'_x-P'_y)=(-1-1,-1-1,-1-1)=(-2,-2,-2)$

$\Rightarrow I=\iint\limits_S(-2,-2,-2)\cdot\vec{dS}$ рачунамо површински интеграл II врсте

Scanned with CamScanner

S параметризујемо као график фје: $\underbrace{z = z(x,y) = 1 - \frac{x}{2}}$, $(x,y) \in D$ где је D ограничена са ByY

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-1)^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{(y-2)^2}{\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2} \leq 1\}$

→ параметризација S:

$\boxed{r: D \to \mathbb{R}^3, \quad r(x,y) = (x, y, 1 - \frac{x}{2})}$

- да ли је оријентација коју даје r баш она коју желимо за S?

вектор нормале: $r'_x \times r'_y \overset{\text{график}}{=} (-z'_x, -z'_y, 1)$
$= (\frac{1}{2}, 0, 1)$ није

$\Rightarrow I = \iint\limits_S (-2,-2,-2) \cdot \vec{dS} = - \iint\limits_D (-2,-2,-2) \cdot (\frac{1}{2}, 0, 1)\, dx\,dy$

$= 2 \iint\limits_D (\frac{1}{2} + 0 + 1)\, dx\,dy = 3 \iint\limits_D dx\,dy = 3\underbrace{P(D)}_{\text{површина елипсе}} = 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{2}} \pi = \boxed{12\pi}$

Scanned with CamScanner