* Анализа 3, Јун 2 2023.

1. Дата је фја $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

а) Испитати непр. фје f.

б) Одредити извод фје f у правцу произв. вектора кроз тачку $(0,0)$.

в) Одредити прве парцијалне изводе фје f у тачки $(0,0)$.

г) Испитати диф. фје f.

Решење: а) фја f је непрекидна на скупу $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ као композиција непр. фја.

Треба испитати непр. у $(0,0)$, тј. да ли је:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

Имамо:

$$0 \le \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| \overset{\text{нејед. тр.}}{\le} \frac{|x^3|+|y^3|}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\le 1}|x| + \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\le 1}|y| \le |x|+|y| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

$\Rightarrow$ (по теореми о 2 полицајца) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

$\Rightarrow$ фја f је непрекидна на $\mathbb{R}^2$

б) Нека је $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ произвољан вектор различит од нула вектора.

$$f'_{\vec{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+\alpha h, 0+\beta h) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\alpha^3 h^3 + \beta^3 h^3}{\alpha^2 h^2 + \beta^2 h^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3(\alpha^3+\beta^3)}{h^3(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$= \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}$$

в) Правила диференцирања, за $(x,y) \neq (0,0)$ имамо:

$$f'_x(x,y) = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{y^4+3y^2x^2-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$$

Парцијалне изводе у $(x,y)=(0,0)$ добијамо из дела б):

$$f'_x(0,0) = f'_{(1,0)}(0,0) = \frac{1^3+0^3}{1^2+0^2} = 1$$

$$f'_y(0,0) = f'_{(0,1)}(0,0) = \frac{0^3+1^3}{0^2+1^2} = 1$$

Парцијалне изводе другог реда у тачки $(0,0)$ рачунамо по дефиницији:

$$f''_{xx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_x(h,0) - f'_x(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4+0-0}{(h^2+0)^2} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{0} = \underset{\sim}{0}$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_x(0,h) - f'_x(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^4+0-0}{(0^2+h^2)^2} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0-1}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}$$

$$= \begin{cases} h>0: & -\infty \\ h<0: & +\infty \end{cases} \quad \text{не постоји!}$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_y(h,0) - f'_y(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0-1}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}$$

$$= \begin{cases} h>0 & -\infty \\ h<0: & +\infty \end{cases} \quad \text{не постоји!}$$

$$f''_{yy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_y(0,h) - f'_y(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = \underset{\sim}{0}$$

г) На $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ парцијални изводи су непрекидни (као количник полинома који су непр. ф-је) па је ф-ја f диференцијабилна на том скупу. Треба испитати диференцијабилност у $(0,0)$

Занима нас да ли важи

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f'_x(0,0)h - f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \overset{?}{=} 0$$

Имамо:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - \overset{0}{f(0,0)} - \overset{1}{f'_x(0,0)}h - \overset{1}{f'_y(0,0)}k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2} - h - k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3+k^3-h^3-hk^2-kh^2-k^3}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \overbrace{\frac{-hk(k+h)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}}^{g(h,k)} = L$$

$L\neq 0$: узмимо низ $(h_n,k_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$

$$g(h_n,k_n) = \frac{-\frac{1}{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)^{3/2}} = \frac{-\frac{1}{n^2}\frac{2}{n}}{\frac{2}{n^2}\frac{\sqrt{2}}{n}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \not\longrightarrow 0 \text{ када } n\to+\infty$$

$\Rightarrow$ ф-ја f није диференцијабилна у $(0,0)$

Scanned with CamScanner

2. Одредити најкраће растојање тачке $A(0,3,3)$ од круга $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=1\}$.

Решење: Круг K је дат као пресек равни $x+y+z=1$ и сфере $x^2+y^2+z^2=1$.
Нађимо тачку на кругу која је најближа тачки $A(0,3,3)$.
Ф-ја чији минимум тражимо је растојање:

$$d(x,A) = \sqrt{x^2+(y-3)^2+(z-3)^2} = g(x,y,z)$$

· Како је корен монотона ф-ја, то ф-је g и

$$f(x,y,z) = x^2+(y-3)^2+(z-3)^2$$

имају заједничке тачке минимума.

• Како је круг K затворен и ограничен скуп, а ф-ја f непрекидна, то се максимум и минимум достижу по Вајерштрасовој теореми.
Пронађимо, методом Лагранжевих множилаца, потенцијалне тачке локалних екстремума.

$$\varphi_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$$
$$\varphi_2(x,y,z) = x+y+z-1$$

Формирамо Лагранжову ф-ју:

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2+(y-3)^2+(z-3)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x+y+z-1)$$

Кандидати за екстремуме су стац. тачке:

$$F'_x = 2x+2\lambda x+\mu = 0$$
$$F'_y = 2(y-3)+2\lambda y+\mu = 0$$
$$F'_z = 2(z-3)+2\lambda z+\mu = 0$$
$$F'_\lambda = x^2+y^2+z^2-1 = 0$$
$$F'_\mu = x+y+z-1 = 0$$

$$2y-6+2\lambda y-2x-2\lambda x = 0 \quad / \cdot(-1)$$
$$2z-6+2\lambda z-2x-2\lambda x = 0 \quad +$$

$$2z-2y+2\lambda z-2\lambda y = 0$$
$$2(z-y)+2\lambda(z-y) = 0$$
$$2(z-y)(1+\lambda) = 0$$

• $z=y$:

$$x^2+y^2+y^2-1 = 0$$
$$x+y+y-1 = 0 \rightarrow x = 1-2y$$

$$(1-2y)^2+2y^2-1 = 0$$
$$1-4y+4y^2+2y^2-1 = 0$$
$$6y^2-4y = 0$$
$$2y(3y-2) = 0$$

$$y=0 \quad \vee \quad y=\tfrac{2}{3}$$
$$z=0 \qquad\quad z=\tfrac{2}{3}$$
$$x=1 \qquad\quad x=-\tfrac{1}{3}$$

• $\lambda=-1$:

$$2x-2x+\mu=0 \rightarrow \mu=0$$
$$2y-6-2y+\mu=0 \rightarrow \mu=6 \quad ↯$$

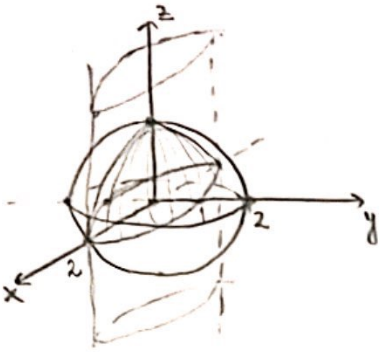
⇒ добијамо две тачке на сфери које задовољавају овај систем:

$B(1,0,0)$, $C\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Како је $f(B)=19$, $f(C)=11$ и како се минимум и максимум достижу, то је тачка C најближа тачки A и од ње је удаљена за $\sqrt{11}$.

3. Израчунати површину дела сфере $x^2+y^2+z^2=4$ који се налази у унутрашњости цилиндра $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

Решење:



Цилиндрична површ у пресеку са сфером исеца из ње симетричне површи у односу на раван xOy. Свака од ова два дела, координатне равни xOz и yOz их деле на четири једнака дела

$$P = \iint_S dS \quad \text{где је } S \text{ део сфере ограничен цилиндром}$$

Због наведене симетричности посматраћемо сферу само у првом октанту.

S параметризујемо као график ф-је: $x^2+y^2+z^2=4$

$$z^2 = 4-x^2-y^2$$

$$\text{I октант} \quad z = +\sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$dS = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy \quad , \quad z_x' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$z_y' = -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$\Rightarrow dS = \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}\,dxdy$$

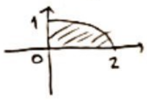
$$= \sqrt{\frac{4-x^2-y^2+x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$\iint_S dS = \iint_D \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy \quad \text{где је } D \text{ пројекција површи } S \text{ на } xOy \text{ раван}$$

$$\Rightarrow P = 8 \iint\limits_{\substack{\frac{x^2}{4}+y^2\le 1\\ x\ge 0,\, y\ge 0}} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy = \left\{ D: \begin{array}{l} \frac{x^2}{4}+y^2 \le 1 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{array} \right.$$

део елипсе у првом квадранту $\rightarrow$ $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$



$$= 16 \int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{\sqrt{\underbrace{4-x^2}_{\text{const}}-y^2}}\,dydx = \left\{ \text{знамо: } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c \right\}$$

$$= 16 \int_0^2 \arcsin\frac{y}{\sqrt{4-x^2}} \Big|_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} dx = 16 \int_0^2 \arcsin\frac{1}{2}\,dx = 16\cdot\frac{\pi}{6}\int_0^2 dx = \frac{16\pi}{\cancel{6}_3}\cdot 2$$

$$= \boxed{\frac{16\pi}{3}}$$

Scanned with CamScanner

4. Решити ДЈ $y'=\frac{2y^3-\sin x\cos x\cdot y}{2\cos^2 x}$ за $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

Решење: $y'=\frac{y^3}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}y$

$y'+\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}y=\frac{y^3}{\cos^2 x}$ ← Бернулијева ДЈ за $\alpha=3$

$y^{-3}y'+\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}y^{-2}=\frac{1}{\cos^2 x}$

смена: $z(x)=y^{-2}(x)$

$z'(x)=-2y^{-3}(x)y'(x)$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}z'+\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}z=\frac{1}{\cos^2 x} \quad /\cdot(-2)$

$z'+\frac{\sin x}{\cos x}z=\frac{-2}{\cos^2 x}$ ово је линеарна ДЈ

$P(x)=\frac{\sin x}{\cos x}, \quad Q(x)=-\frac{2}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow z(x)=e^{-\int P(x)dx}\left(c+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right), \quad c\in\mathbb{R}$

$\int P(x)dx=\int -\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=\ln|\cos x|+c \underset{\uparrow}{=} \ln(\cos x)+c$

$x\in(0,\frac{\pi}{2})\Rightarrow\cos x>0$

→ узимо $-\ln(\cos x)$

$=e^{-\ln(\cos x)}\left(c+\int\frac{-2}{\cos^2 x}e^{\ln(\cos x)}dx\right)$

$=\frac{1}{\cos x}\left(c-2\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx\right)$

$=\frac{1}{\cos x}\left(c-2\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx\right)$

$=\frac{1}{\cos x}\left(c-2\int\frac{d(\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}\right)$

$=\frac{1}{\cos x}\left(c-\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right)$

$=\frac{1}{\cos x}\left(c-\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$

$\Rightarrow z(x)=y^{-2}(x) \Rightarrow y(x)=z^{-\frac{1}{2}}(x)=\frac{1}{\sqrt{z(x)}}$

$y(x)=\pm\sqrt{\frac{\cos x}{c-\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}}, \quad c\in\mathbb{R}$

Не смемо заборавити (делили смо са y^2) решење $\boxed{y=0}$

↑

јесте решење полазне ј-не

$0=\frac{2\,0-\sin x\cos x\cdot 0}{2\cos^2 x}$ ✓