Писмени испит из Анализе 3 (модул Информатика)
Јун 1, 2023

1. Дата је функција $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^4+y^2}} + y^2 \sin \frac{1}{\sqrt{y^4+x^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (а) Испитати непрекидност функције f.

   (б) Испитати постојање и непрекидност парцијалних извода f'_x и f'_y.

   (в) Испитати диференцијабилност функције f.

2. Одредити локалне екстремуме функције $f(x,y) = x^3 + y^4 - 2x^2y$

3. Нека је ℓ позитивно оријентисан део кружнице $x^2+y^2=1$ у првом квадранту и нека је $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ векторско поље дато са $F(x,y) = (\sin^2((x+y-1)^2) - y, x - \cos^2((x+y-1)^2)$. Израчунати

$$\int_\ell F \cdot dr$$

4. Решити диференцијалну једначину $y' + \dfrac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}} = 0$

Писмени испит из Анализе 3 (модул Информатика)
Јун 1, 2023

1. Дата је функција $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^4+y^2}} + y^2 \sin \frac{1}{\sqrt{y^4+x^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (а) Испитати непрекидност функције f.

   (б) Испитати постојање и непрекидност парцијалних извода f'_x и f'_y.

   (в) Испитати диференцијабилност функције f.

2. Одредити локалне екстремуме функције $f(x,y) = x^3 + y^4 - 2x^2y$

3. Нека је ℓ позитивно оријентисан део кружнице $x^2+y^2=1$ у првом квадранту и нека је $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ векторско поље дато са $F(x,y) = (\sin^2((x+y-1)^2) - y, x - \cos^2((x+y-1)^2)$. Израчунати

$$\int_\ell F \cdot dr$$

4. Решити диференцијалну једначину $y' + \dfrac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}} = 0$

Решења писменог испита из Анализе 3 (модул Информатика)
Јун 1, 2023

1.

(а) f је непрекидна као композиција непрекидних функција на скупу $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(2 поена)**. Треба испитати непрекидност у $(0,0)$ тј. да ли је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$ **(2 поена)**. Имамо:

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| x^2 \sin\frac{1}{\sqrt{x^4+y^2}} + y^2 \sin\frac{1}{\sqrt{y^4+x^2}} \right| \leq \left| x^2 \sin\frac{1}{\sqrt{x^4+y^2}} \right| + \left| y^2 \sin\frac{1}{\sqrt{y^4+x^2}} \right| \leq x^2 + y^2 \to 0$$

када $(x,y) \to (0,0)$ па је по Теореми о два полицајца $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ **(3 поена)** те је f непрекидна на целом $\mathbb{R}^2$

(б) Правилима диференцирања, за $(x,y) \neq (0,0)$ је:

$$f'_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^4+y^2}} - \frac{2x^5}{\sqrt{(x^4+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^4+y^2}} - \frac{xy^2}{\sqrt{(y^4+x^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{y^4+x^2}} \text{ } \textbf{(1 поен)}$$

$$f'_y(x,y) = 2y\sin\frac{1}{\sqrt{y^4+x^2}} - \frac{2y^5}{\sqrt{(y^4+x^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{y^4+x^2}} - \frac{yx^2}{\sqrt{(x^4+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^4+y^2}} \text{ } \textbf{(1 поен)}$$

Док у $(0,0)$ радимо по дефинцији:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h^2} \text{ } \textbf{(1 поен)}$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h^2} \text{ } \textbf{(1 поен)}$$

Последњи лимес је једнак 0 по Теореми о два полицајца: $0 \leq \left|h\sin\frac{1}{h^2}\right| \leq |h| \to 0$ **(2 поена)**. Остаје да испитамо да ли су парцијални изводи непрекидни. f'_x и f'_y су непрекидне као композиције непрекидних функција на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(2 поена)**. Приметимо низ $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0\right)$. Тада је

$$f'_x(x_n,y_n) = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\sin 2n\pi - 2\sqrt{2n\pi}\cos 2n\pi = -2\sqrt{2n\pi} \to -\infty \neq 0 = f'_x(0,0)$$

па парцијални изводи f'_x и f'_y (због симетрије) нису непрекидни у $(0,0)$ **(3 поена)**

(в) На $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ парцијални изводи f'_x и f'_y су непрекидни, па по теореми је функција f диференцијабилна на том скупу **(2 поена)**. Остаје још испитати диференцијабилност на $(0,0)$: **(2 поена)**

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-f'_x(0,0)\cdot h - f'_y(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = (*)$$

Из неједнакости у делу под (a) (када (x,y) заменимо са (h,k)), дељењем са $\sqrt{h^2+k^2}$ добијамо:

$$0 \leq \left|\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq \sqrt{h^2+k^2} \to 0$$

када $(h,k) \to (0,0)$ па је $(*) = 0$ **(3 поена)** одакле добијамо да је f диференцијабилна на $\mathbb{R}^2$

2. Одредимо стационарне тачке функције f. Парцијални изводи функције f су:

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 4xy \text{ } \textbf{(2 поена)}$$

$$f'_y(x,y) = 4y^3 - 2x^2 \text{ } \textbf{(2 поена)}$$

Па је из $f'_x(x,y)$ или $x = 0$ или је $x = \frac{4}{3}y$

- $x = 0$
  Из друге једначине одмах добијамо $y = 0$ па је $(0,0)$ једна стационарна тачка. **(3 поена)**
- $x = \frac{4}{3}y$
  Из друге једначине је $y = 0$ или $y = \frac{8}{9}$ тј. $x = 0$ или $x = \frac{32}{27}$ па добијамо стационарну тачку $(\frac{32}{27}, \frac{8}{9})$. **(3 поена)**

Хесијан функције (матрица других извода) функције f је:

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = d^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-4y & -4x \\ -4x & 12y^2 \end{pmatrix} \textbf{ (5 поена)}$$

Испитајмо сада да ли су дате стационарне тачке локални екстремуми:

- $(x,y) = (0,0)$
  Добијамо да је
  $$\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  па не можемо ништа закључити из Силвестеровог критеријума. Приметимо да је $f(0,0) = 0$ и $f(-\varepsilon, 0) = -\varepsilon^3 < 0$ и $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^3 > 0$ за $\varepsilon > 0$. Самим тим, тачка $(0,0)$ није локални екстремум. **(5 поена)**
- $(x,y) = (\frac{32}{27}, \frac{8}{9})$
  Добијамо да је
  $$\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} \frac{32}{9} & -\frac{128}{27} \\ -\frac{128}{27} & \frac{768}{81} \end{pmatrix}$$
  па како је $\frac{32}{9} > 0$, $\det \operatorname{Hess} f = \frac{8192}{729} > 0$ то је $(\frac{32}{27}, \frac{8}{9})$ локални минимум по Силвестеровом критеријуму. **(5 поена)**

3. Нека је γ дуж са крајевима $A(0,1)$ и $B(1,0)$ позитивно оријентисана (од A ка B). Тада је њена параметризација дата са: $\gamma(t) = (t, 1-t)$ за $t \in [0,1]$. Посматрајмо **(3 поена)**

$$I = \int_{\ell \cup \gamma} F \cdot dr$$

Како је крива $\ell \cup \gamma$ затворена, означимо са D (коначну) област коју она ограничава. Применимо Гринову формулу на I. **(3 поена)** Добијамо **(6 поена)**

$$I = \iint_D (1+4(x+y-1)\cos((x+y-1)^2)\sin((x+y-1)^2)) - (4(x+y-1)\sin((x+y-1)^2)\cos((x+y-1)^2)-1) dxdy = 2\iint_D dxdy$$

Последњи интеграл се може одредити на више начина, најлакше је приметити да је $I = 2P(D)$ где је D одсечак дела круга $k : x^2 + y^2 = 1$ у првом квадранту ограничен тетивом $\gamma : x + y = 1$ па је $P(D) = P(k_{\mathrm{I}}) - P(\triangle AOB) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ где је k_{I} део круга k у првом квадранту. Сада је $I = \frac{\pi}{2} - 1$ **(7 поена)**. Са друге стране је

$$I = \int_\ell F \cdot dr + \int_\gamma F \cdot dr$$

Како нам је дата параметризација криве γ имамо:

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_0^1 F(t, 1-t) \circ (1,-1) dt = \int_0^1 0 dt = 0 \textbf{ (4 поена)}$$

Коначно добијамо

$$\int_\ell F \cdot dr = I = \frac{\pi}{2} - 1 \textbf{ (2 поена)}$$

4. Приметимо да можемо једначину трансформисати у облик **(3 поена)**

$$\underbrace{\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}_{N(x,y)} dy = 0$$

Приметимо да је

$$M'_y(x,y) = N'_x(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

па је дата диференцијална једначина у тоталном диференцијалу **(3+3+1=7 поена)**. Одредимо $f(x,y)$ тако да $f'_x = M$ и $f'_y = N$ **(2 поена)**. Из $f = \int M dx$ решавањем интеграла **(8 поена)**

$$\frac{1}{2}\int \ln(x^2+y^2)dx = \begin{vmatrix} u = \ln(x^2+y^2) & dv = dx \\ du = \frac{2x}{x^2+y^2} & v = x \end{vmatrix} = \frac{x\ln(x^2+y^2)}{2} - \int \frac{x^2}{x^2+y^2}dx = \cdots = \frac{x\ln(x^2+y^2)}{2} - x + y\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + c(y)$$

$c(y)$ одређујемо из $f'_y = N$ тј. $c'(y) = 0$ тј. $c(y) = C = const$ **(3 поена)**. Коначно, решење дате диференцијалне једначине је:

$$f(x,y) = c \iff \frac{x\ln(x^2+y^2)}{2} - x + y\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C = c \textbf{ (2 поена)}$$