Писмени испит из Анализе 1 - 2.7.2022.

1. [35п] Нека је дата функција $f(x)=\frac{x^2}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$.

   а) Испитати ток и скицирати график функције f.

   б) У зависности од $a\in\mathbb{R}$ одредити број решења једначине $f(x)=x+a$.

   в) Наћи површину троугла који тангента на график у тачки $(1,\frac{e}{2})$ образује са координатним осама.

2. [15п] Нека је $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=\begin{cases}\frac{\cos^2 t}{t}, & t\geqslant\frac{\pi}{2}\\ 0, & 0\le t<\frac{\pi}{2}\end{cases}$. Нека је $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. Испитати равномерну непрекидност функције F на $[0,+\infty)$.

3. а) [5п] Доказати да је $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ за свако $x>0$.

   б) [15п] За $a>0$ израчунати интеграл $I(a)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(e^x)}{e^{ax}+e^{-ax}}dx$.

4. [30п] Нека је низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такав да је $a_1=1$ и $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{\sqrt{e^{a_n^2}-1}}$ за свако $n\in\mathbb{N}$.

   а) Доказати да је $e^x>1+x$ за свако $x>0$.

   б) Доказати да низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира и наћи му граничну вредност.

   в) Наћи константу $c\in\mathbb{R}$ тако да важи $a_n^2\sim\frac{c}{n}$ када $n\to+\infty$.

   г) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin a_n$.

Писмени испит из Анализе 1 - 2.7.2022.

1. [35п] Нека је дата функција $f(x)=\frac{x^2}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$.

   а) Испитати ток и скицирати график функције f.

   б) У зависности од $a\in\mathbb{R}$ одредити број решења једначине $f(x)=x+a$.

   в) Наћи површину троугла који тангента на график у тачки $(1,\frac{e}{2})$ образује са координатним осама.

2. [15п] Нека је $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=\begin{cases}\frac{\cos^2 t}{t}, & t\geqslant\frac{\pi}{2}\\ 0, & 0\le t<\frac{\pi}{2}\end{cases}$. Нека је $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. Испитати равномерну непрекидност функције F на $[0,+\infty)$.

3. а) [5п] Доказати да је $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ за свако $x>0$.

   б) [15п] За $a>0$ израчунати интеграл $I(a)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(e^x)}{e^{ax}+e^{-ax}}dx$.

4. [30п] Нека је низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такав да је $a_1=1$ и $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{\sqrt{e^{a_n^2}-1}}$ за свако $n\in\mathbb{N}$.

   а) Доказати да је $e^x>1+x$ за свако $x>0$.

   б) Доказати да низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира и наћи му граничну вредност.

   в) Наћи константу $c\in\mathbb{R}$ тако да важи $a_n^2\sim\frac{c}{n}$ када $n\to+\infty$.

   г) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin a_n$.