Писмени испит из Анализе 1 - 13.6.2022.

1. Нека је дата функција $f(x) = |x-1| + \ln|\frac{x+1}{x}|$.
   а) [2п] Доказати да за свако x из домена функције f важи $(\ln|\frac{x+1}{x}|)' = -\frac{1}{x(x+1)}$.
   б) [2п] Одредити $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to 1+} f'(x)$.
   в) [5п] Испитати диференцијабилност функције f у тачки $x = 1$.
   г) [12п] Испитати ток и скицирати график функције f.
   д) [4п] У зависности од $a \in \mathbb{R}$ одредити број решења једначине $f(x) = a$.

2. Нека је $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција, диференцијабилна на $(-1,1)$, таква да је $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = -\int_{-1}^0 f(x)dx = 1$.
   а) [13п] Доказати да постоје $a \in (-1,0)$ и $b \in (0,1)$ такви да је $f(a) = -1$ и $f(b) = 1$.
   б) [12п] Доказати да постоји $c \in (-1,1)$ такво да $f'(c) > 1$.

3. а) [4п] Одредити Маклоренов полином реда 3 функције $g(x) = \arcsin x$.
   б) [9п] У зависности од параметра $\beta \in \mathbb{R}$ испитати конвергенцију интеграла $I_\beta = \displaystyle\int_0^1 \frac{x - \arcsin x}{x^\beta}dx$.
   в) [9п] Наћи неку примитивну функцију функције $f(x) = \frac{x-\arcsin x}{x^2}$ на интервалу $(0,1)$.
   г) [3п] Израчунати, уколико постоји, интеграл $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x - \arcsin x}{x^2}dx$.

4. [25п] Нека је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задат са $4x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$, $n \geq 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{3}{4}$. Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x_n}{n}$ и сумирати га ако конвергира.

Писмени испит из Анализе 1 - 13.6.2022.

1. Нека је дата функција $f(x) = |x-1| + \ln|\frac{x+1}{x}|$.
   а) [2п] Доказати да за свако x из домена функције f важи $(\ln|\frac{x+1}{x}|)' = -\frac{1}{x(x+1)}$.
   б) [2п] Одредити $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to 1+} f'(x)$.
   в) [5п] Испитати диференцијабилност функције f у тачки $x = 1$.
   г) [12п] Испитати ток и скицирати график функције f.
   д) [4п] У зависности од $a \in \mathbb{R}$ одредити број решења једначине $f(x) = a$.

2. Нека је $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција, диференцијабилна на $(-1,1)$, таква да је $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = -\int_{-1}^0 f(x)dx = 1$.
   а) [13п] Доказати да постоје $a \in (-1,0)$ и $b \in (0,1)$ такви да је $f(a) = -1$ и $f(b) = 1$.
   б) [12п] Доказати да постоји $c \in (-1,1)$ такво да $f'(c) > 1$.

3. а) [4п] Одредити Маклоренов полином реда 3 функције $g(x) = \arcsin x$.
   б) [9п] У зависности од параметра $\beta \in \mathbb{R}$ испитати конвергенцију интеграла $I_\beta = \displaystyle\int_0^1 \frac{x - \arcsin x}{x^\beta}dx$.
   в) [9п] Наћи неку примитивну функцију функције $f(x) = \frac{x-\arcsin x}{x^2}$ на интервалу $(0,1)$.
   г) [3п] Израчунати, уколико постоји, интеграл $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x - \arcsin x}{x^2}dx$.

4. [25п] Нека је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задат са $4x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$, $n \geq 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{3}{4}$. Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x_n}{n}$ и сумирати га ако конвергира.