ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ, 3Р) - Писмени испит 12. јануар 2023.

1. Баца се хомогена коцкица за игру. Ако се добије број већи од 4, на случајан начин се бира у равни тачка из унутрашње области правоугаоника са теменима у тачкама $(1,0)$, $(3,2)$, $(2,3)$ и $(0,1)$. У супротном, на случајан начин се бира тачка из унутрашње области круга са центром у $(1,1)$ чија је дужина полупречника 1. Ако је збир координата изабране тачке мањи од 2, израчунати вероватноћу да су обе координате мање од 1.

2. За случајну величину X важи да је

$$P\left\{X = \frac{m\pi}{4}\right\} = \begin{cases} 8 \cdot 3^{-m-1}, & \text{за непаран природан број } m, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

   Нека је $Y = \sin(2X)$, случајна величина Z има униформну $\mathcal{U}[0,1]$ расподелу и Y и Z су независне. Ако је $W = Y + Z$, одредити расподелу случајне величине W.

3. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(1)$ расподелу, а $Y = [X]$. Одредити коефицијент корелације случајних величина X и Y.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ, 3Р) - Писмени испит 12. јануар 2023.

1. Баца се хомогена коцкица за игру. Ако се добије број већи од 4, на случајан начин се бира у равни тачка из унутрашње области правоугаоника са теменима у тачкама $(1,0)$, $(3,2)$, $(2,3)$ и $(0,1)$. У супротном, на случајан начин се бира тачка из унутрашње области круга са центром у $(1,1)$ чија је дужина полупречника 1. Ако је збир координата изабране тачке мањи од 2, израчунати вероватноћу да су обе координате мање од 1.

2. За случајну величину X важи да је

$$P\left\{X = \frac{m\pi}{4}\right\} = \begin{cases} 8 \cdot 3^{-m-1}, & \text{за непаран природан број } m, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

   Нека је $Y = \sin(2X)$, случајна величина Z има униформну $\mathcal{U}[0,1]$ расподелу и Y и Z су независне. Ако је $W = Y + Z$, одредити расподелу случајне величине W.

3. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(1)$ расподелу, а $Y = [X]$. Одредити коефицијент корелације случајних величина X и Y.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ, 3Р) - Писмени испит 12. јануар 2023.

1. Баца се хомогена коцкица за игру. Ако се добије број већи од 4, на случајан начин се бира у равни тачка из унутрашње области правоугаоника са теменима у тачкама $(1,0)$, $(3,2)$, $(2,3)$ и $(0,1)$. У супротном, на случајан начин се бира тачка из унутрашње области круга са центром у $(1,1)$ чија је дужина полупречника 1. Ако је збир координата изабране тачке мањи од 2, израчунати вероватноћу да су обе координате мање од 1.

2. За случајну величину X важи да је

$$P\left\{X = \frac{m\pi}{4}\right\} = \begin{cases} 8 \cdot 3^{-m-1}, & \text{за непаран природан број } m, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

   Нека је $Y = \sin(2X)$, случајна величина Z има униформну $\mathcal{U}[0,1]$ расподелу и Y и Z су независне. Ако је $W = Y + Z$, одредити расподелу случајне величине W.

3. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(1)$ расподелу, а $Y = [X]$. Одредити коефицијент корелације случајних величина X и Y.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ, 3Р) - Писмени испит 12. јануар 2023.

Решења задатака

1. Дефинишимо следеће догађаје:

- A догађај да је збир координата изабране тачке мањи од 2,
- B догађај да су обе координате изабране тачке мање од 1,
- H_1 догађај да је на коцкици добијен број из скупа $\{1,2,3,4\}$ (или еквивалентно, бира се тачка из унутрашње области датог круга K),
- H_2 догађај да је на коцкици добијен број из скупа $\{5,6\}$ (или еквивалентно, бира се тачка из унутрашње области датог правоугаоника D).

Приметимо да скуп $\{H_1, H_2\}$ чини потпун систем догађаја, при чему је

$$P(H_1) = \frac{2}{3}, \quad P(H_2) = 1 - P(H_1) = \frac{1}{3}.$$

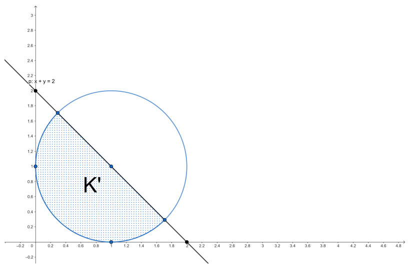
(1 поен)

Користећи геометријску дефиницију вероватноће добијамо:

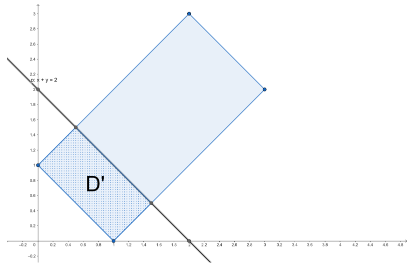
$$P(A|H_1) = \frac{P(AH_1)}{P(H_1)} = \frac{\text{површина полукруга } K'}{\text{површина круга } K} = \frac{1}{2} \quad \text{(види слику 1)},$$

$$P(A|H_2) = \frac{P(AH_2)}{P(H_2)} = \frac{\text{површина правоугаоника } D'}{\text{површина правоугаоника } D} = \frac{1}{4} \quad \text{(види слику 2)}.$$

(2 поена)



Слика 1.



Слика 2.

Користећи формулу потпуне вероватноће добија се

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

(1 поен)

Даље имамо да је тражена вероватноћа једнака

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{P(B\cap(H_1\cup H_2))}{P(A)} = \frac{P(B\cap H_1) + P(B\cap H_2)}{P(A)}$$
$$= \frac{P(H_1)P(B|H_1) + P(H_2)P(B|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{2},$$

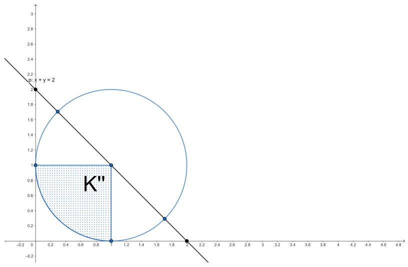
(3 поена)

јер је $B \subset A$ и важи

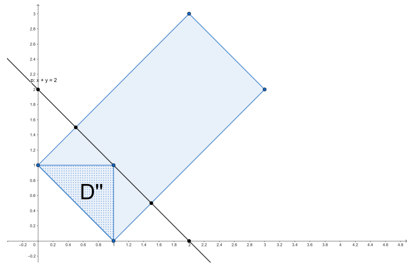
$$P(B|H_1) = \frac{\text{површина кружног исечка } K''}{\text{површина круга } K} = \frac{1}{4} \quad \text{(види слику 3)},$$

$$P(B|H_2) = \frac{\text{површина исечка из правоугаоника } D''}{\text{површина правоугаоника } D} = \frac{1}{8} \quad \text{(види слику 4)}.$$

(3 поена)



Слика 3.



Слика 4.

2. Приметимо да је

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{за } n = 2k, \\ 1, & \text{за } n = 4k+1, \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ -1, & \text{за } n = 4k+3. \end{cases}$$

(2 поен)

Стога случајна величина Y узима вредности из скупа $\{-1, 1\}$ и важи да је

$$\begin{aligned} P\{Y=-1\} = P\{\sin(2X) = -1\} &= P\left\{X = \frac{(4k+3)\pi}{4} \mid k \in \mathbb{N}_0\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{X = \frac{(4k+3)\pi}{4}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} 8 \cdot 3^{-4k-4} \\ &= \frac{8}{81}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{81^k} = \frac{8}{81}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{81}} \\ &= \frac{8}{81}\cdot\frac{81}{80} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Сада је $P\{Y=1\} = P\{\sin(2X)=1\} = 1 - P\{\sin(2X) = -1\} = \frac{9}{10}$. Према томе, случајна величина Y има закон расподеле дат са

$$Y : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

(3 поена)

Функција расподеле случајне величине Z је

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z, & 0 \le z < 1, \\ 1, & z \ge 1. \end{cases}$$

Треба одредити

$$F_W(w) = P\{W \le w\} = P\{Y + Z \le w\} = (\star)$$

Разликујемо случајеве:

- $w < -1$: $(\star) = 0$,
- $-1 \le w < 0$:

$$\begin{aligned} (\star) &= P\{Y=-1, Z \le w+1\} + P\{Y=1, Z \le w-1\} \\ &= P\{Y=-1\}P\{Z \le w+1\} \\ &= \frac{1}{10}\cdot(w+1). \end{aligned}$$

- $0 \le w < 1$:

$$\begin{aligned} (\star) &= P\{Y=-1, Z \le w+1\} + P\{Y=1, Z \le w-1\} \\ &= P\{Y=-1\} \\ &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

- $1 \le w < 2$:

$$\begin{aligned}(\star) &= P\{Y=-1, Z \le w+1\} + P\{Y=1, Z \le w-1\}\\ &= P\{Y=-1\} + P\{Y=1\}P\{Z \le w-1\}\\ &= \frac{1}{10} + \frac{9}{10}\cdot(w-1).\end{aligned}$$

- $w \ge 2$: $(\star) = 1$

Дакле, функција расподеле случајне величине W је

$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & w < -1\\ \frac{1}{10}(w+1), & -1 \le w < 0\\ \frac{1}{10}, & 0 \le w < 1\\ \frac{9}{10}w - \frac{4}{5}, & 1 \le w < 2\\ 1, & w \ge 2.\end{cases}$$

(5 поена)

3. Пошто $X \sim \mathcal{E}(1)$, имамо да је $EX = DX = 1$. Даље случајна величина $Y = [X]$ може да постигне вредности из скупа $\mathbb{N}_0$ и важи да је

$$P\{Y=k\} = P\{[X]=k\} = P\{k \le X < k+1\} = \int_k^{k+1} e^{-x}dx = e^{-k} - e^{-(k+1)} = e^{-k}(1-e^{-1}).$$

(1 поен)

Можемо приметити да случајна величина Y има нестандардну геометријску $\mathcal{G}(1-e^{-1})$ расподелу, међутим, није тешко и директно израчунати очекивање EY и дисперзију DY.

Имамо редом да је

$$\begin{aligned}EY &= \sum_{k=0}^{\infty} kP\{Y=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} kP\{Y=k\}\\ &= P\{Y=1\}\\ &+ P\{Y=2\} + P\{Y=2\}\\ &+ P\{Y=3\} + P\{Y=3\} + P\{Y=3\}\\ &\vdots\\ &+ P\{Y=n\} + P\{Y=n\} + ... + P\{Y=n\}\\ &\vdots\\ &= P\{Y \ge 1\} + P\{Y \ge 2\} + ... + P\{Y \ge n\} + ...\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y \ge k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{[X] \ge k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X \ge k\}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{\infty} e^{-x}dx = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1}{e}\frac{1}{1-\frac{1}{e}}\\ &= \frac{1}{e-1}.\end{aligned}$$

(2.5 поена)

Даље је

$$EY^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P\{Y=k\} = (e-1)\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(k+1)}.$$

Суму која се појављује у изразу за EY^2 одредићемо на два начина.

Први начин: Приметимо да важи

$$\left(e^{-kx}\right)'' = k^2 e^{-kx}$$

за свако $k \in \mathbb{N}$. Такође, знамо да је Маклоренов развој функције $f(x) = \frac{1}{1-x}$ дат са

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

за $x \in [-1, 1]$. Из претходног имамо да је редом

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-kx} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-kx}\right)'' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}\right)'' = \left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right)'' = \frac{e^x(1+e^x)}{(e^x-1)^3}$$

Замјеном $x = 1$ у претходном изразу добијамо да је $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k} = \frac{e(1+e)}{(e-1)^3}$, одакле слиједи да је

$$EY^2 = (e-1) \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{e(1+e)}{(e-1)^3} = \frac{e+1}{(e-1)^2}.$$

Напомена 1. Свака од функција $f_k(x) = e^{-kx} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ је диференцијабилна и ред $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ равномерно конвергира, а сам ред $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ конвергира бар у једној тачки $x_0 = 1$.

Напомена 2. Истом техником диференцирања реда члан-по-члан могли смо одредити и EY.

Други начин: Нека је $A = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(k+1)}$, па је

$$\begin{aligned}
A &= e^{-2} + 4e^{-3} + 9e^{-4} + 16e^{-5} + ... \\
eA &= e^{-1} + 4e^{-2} + 9e^{-3} + 16e^{-4} + ... \\
(e-1)A &= e^{-1} + 3e^{-2} + 5e^{-3} + 7e^{-4} + 9e^{-5}... \\
e(e-1)A &= 1 + 3e^{-1} + 5e^{-2} + 7e^{-3} + 9e^{-4}... \\
(e-1)^2 A &= 1 + 2e^{-1} + 2e^{-2} + 2e^{-3} + 2e^{-4}... \\
&= -1 + 2(1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + e^{-4} + ...) \\
&= -1 + 2\frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e+1}{e-1},
\end{aligned}$$

тј. добијамо да је

$$EY^2 = (e-1)A = \frac{e+1}{(e-1)^2}.$$

Одавде имамо да је

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{e}{(e-1)^2}.$$

(3.5 поена)

Напомена 3. Вредности за EY и EY^2 могли смо одредити и свођењем претходних редова основним трансформацијама на геометријске редове. Из педагошких разлога, демонстрираћемо то на примеру за EY. Имамо да је

$$\begin{aligned}
EY &= \sum_{k=0}^{\infty} kP\{Y=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k\left(e^{-k} - e^{-(k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)e^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{e}} - 1 = \frac{1}{e-1}.
\end{aligned}$$

Да бисмо израчунали коефицијент корелације, треба још да израчунамо EXY.

$$\begin{aligned}
EXY &= E(X[X]) = \int_0^{\infty} x[x]e^{-x}dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} x[x]e^{-x}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} xke^{-x}dx \\
&= \begin{Bmatrix} u = x & dv = e^{-x}dx \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} k \left(-xe^{-x}\Big|_k^{k+1} + \int_k^{k+1} e^{-x}dx \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \left(ke^{-k} - (k+1)e^{-(k+1)} + e^{-k} - e^{-(k+1)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \left((k+1)(e^{-k} - e^{-(k+1)}) - e^{-(k+1)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)e^{-(k+1)}(e-1) - \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-(k+1)} \\
&= (e-1)\sum_{k=0}^{\infty} k^2e^{-(k+1)} + (e-1)\sum_{k=0}^{\infty} ke^{-(k+1)} - \frac{1}{e-1}(e-1)\sum_{k=0}^{\infty} ke^{-(k+1)} \\
&= EY^2 + EY - \frac{1}{e-1}EY = \frac{e+1}{(e-1)^2} + \frac{1}{e-1} - \frac{1}{(e-1)^2} \\
&= \frac{2e-1}{(e-1)^2},
\end{aligned}$$

при чему смо приликом преласка из првог у други ред користили особину адитивности интеграла. Коначно, добијамо да је коефицијент корелације

$$\rho_{X,Y} = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DXDY}} = \frac{\frac{2e-1}{(e-1)^2} - \frac{1}{e-1}}{\sqrt{\frac{1}{(e-1)^2}}} = \frac{\sqrt{e}}{e-1} \approx 0.96.$$

(3 поена)