Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ, 3Р)

28. август 2023. године

---

1. Михајло игра шаховски турнир са две пријатељице Аном и Тамаром. Ана је професионални шахиста, а Тамара шахиста аматер. Он осваја турнир уколико у n партија у којима наизменично игра против Ане и Тамаре оствари бар k, $k < n$, узастопних победа. Како је Ана професионални шахиста, вероватноћа да је у једној партији Михајло победи мања је од вероватноће да у једној партији победи Тамару. Против кога Михајло треба да игра прву партију да би вероватноћа освајања турнира била већа, ако је n непаран, а k паран број?

2. Нека су $X_1, X_2, \ldots, X_{2024}$ независне случајне величине са истом експоненцијалном $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом. Одредити математичко очекивање и дисперзију случајне величине X, где је
$$X = \min\left\{\frac{X_1}{X_1 + X_2}, \frac{X_3}{X_3 + X_4}, \ldots, \frac{X_{2023}}{X_{2023} + X_{2024}}\right\}.$$

3. У оквиру једног истраживања се испитује апарат који се састоји од два транзистора. Сваки транзистор независно од другог може да прегори са вероватноћом 0.1. Апарат се сматра неисправним ако бар један од транзистора прегори. За потребе истраживања тестира се 1000 апарата. Одредити најмањи број m, за који ће, са вероватноћом не мањом од 0.985, број неисправних апарата приликом тестирања бити највише m.

Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ, 3Р)

28. август 2023. године

---

1. Михајло игра шаховски турнир са две пријатељице Аном и Тамаром. Ана је професионални шахиста, а Тамара шахиста аматер. Он осваја турнир уколико у n партија у којима наизменично игра против Ане и Тамаре оствари бар k, $k < n$, узастопних победа. Како је Ана професионални шахиста, вероватноћа да је у једној партији Михајло победи мања је од вероватноће да у једној партији победи Тамару. Против кога Михајло треба да игра прву партију да би вероватноћа освајања турнира била већа, ако је n непаран, а k паран број?

2. Нека су $X_1, X_2, \ldots, X_{2024}$ независне случајне величине са истом експоненцијалном $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом. Одредити математичко очекивање и дисперзију случајне величине X, где је
$$X = \min\left\{\frac{X_1}{X_1 + X_2}, \frac{X_3}{X_3 + X_4}, \ldots, \frac{X_{2023}}{X_{2023} + X_{2024}}\right\}.$$

3. У оквиру једног истраживања се испитује апарат који се састоји од два транзистора. Сваки транзистор независно од другог може да прегори са вероватноћом 0.1. Апарат се сматра неисправним ако бар један од транзистора прегори. За потребе истраживања тестира се 1000 апарата. Одредити најмањи број m, за који ће, са вероватноћом не мањом од 0.985, број неисправних апарата приликом тестирања бити највише m.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ, 3Р) - Писмени испит 26. јун 2023.

Решења задатака

1. Нека је p_A вероватноћа да ће Михајло остварити победу у партији против Ане, а p_T да ће остварити победу у партији против Тамаре. Из претпоставке задатка знамо да је $p_A < p_T$. Нека је Нека је A_m догађај да Михајло освоји турнир након m партија. Нека је $\Omega = \{\top, \bot\}^n$ простор свих елементарних ишода који моделују све могуће исходе у n партија на турниру, где $\top$ означава да је Михајло победио у партији, а $\bot$ да је изгубио. Означимо са P_A и P_T вероватносне мере на $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ које мере вероватноћу исхода у зависности од тога да ли је прва партија била против Ане или Тамаре, редом. Приметимо, најпре, да за парно m важи $P_A(A_m) = P_T(A_m)$. Заиста, ако за произвољан низ x означимо са $\tau(x)$ његов палиндром, тривијално важи за сваки $x \in \mathcal{D} = \{\top, \bot\}^m$ да је $\tau(x) \subseteq A_m$ ако и само ако $x \subseteq A_m$ (m и k су парни бројеви), те је и $P_A(x) = P_T(\tau(x))$ и $P_T(x) = P_A(\tau(x))$. Одавде следи да је

$$\begin{aligned} P_A(A_m) &= \sum_{x\in\mathcal{D}, x\subseteq A_m} P_A(x) = \sum_{x\in\mathcal{D}, x\subseteq A_m} P_T(\tau(x)) = \sum_{y:\tau(y)\in\mathcal{D}, \tau(y)\subseteq A_m} P_T(y) \\ &= \sum_{y\in\mathcal{D}, y\subseteq A_m} P_T(y) = P_T(A_m). \end{aligned}$$

Нека је сада B_n догађај у којем Михајло није победио у партији $n-k$, али је након ње остварио победе у партијама $n-k+1, \ldots, n$. Тада је $A_n = A_{n-1} \cup (A^c_{n-1} \cap B_n)$, па су догађаји A_{n-k-1} и B_n независни и важи $A^c_{n-1} \cap B_n = A^c_{n-k-1} \cap B_n$. Коначно, имамо да вреди следеће

$$\begin{aligned} P_A(A_n) - P_T(A_n) &= (P_A(A_{n-1}) + P_A(A^c_{n-k-1} \cap B_n)) - (P_T(A_{n-1}) + P_T(A^c_{n-k-1} \cap B_n)) \\ &= P_A(A^c_{n-k-1})P_A(B_n) - P_T(A^c_{n-k-1})P_T(B_n) \\ &= P_A(A^c_{n-k-1})(P_A(B_n) - P_T(B_n)) \\ &= P_A(A^c_{n-k-1})\left((1-p_A)p_A^{\frac{k}{2}}p_T^{\frac{k}{2}} - (1-p_T)p_A^{\frac{k}{2}}p_T^{\frac{k}{2}}\right) \\ &= P_A(A^c_{n-k-1})(p_T - p_A)p_A^{\frac{k}{2}}p_T^{\frac{k}{2}} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Дакле, Михајло треба играти прву партију са тежим противником, односно Аном.

2. Случајне величине

$$W_1 = \frac{X_1}{X_1+X_2}, W_2 = \frac{X_3}{X_3+X_4}, \ldots, W_{1012} = \frac{X_{2023}}{X_{2023}+X_{2024}}$$

су међусобно независне јер су $X_1, X_2, \ldots, X_{2024}$ међусобно независне. Одредимо најпре расподелу случајне величине $W_i = \frac{X_{2i-1}}{X_{2i-1}+X_{2i}}$, за $i = 1, 2, \ldots, 1012$. Имамо да је функција расподеле за W_i дата са

$$F_{W_i}(w) = \int_0^\infty \left(\int_0^{wy/(1-w)} e^{-y}e^{-x}\,dx\right)dy = \int_0^\infty e^{-y}\left(1 - e^{-wy/(1-w)}\right)dy$$

$$= \int_0^\infty e^{-y} - e^{-y/(1-w)}\,dy = 1 - (1-w) = w.$$

одакле следи да $W_i \sim \mathcal{U}[0,1]$, за $i = 1, 2, \ldots, 1012$. Функција расподеле минималне статистике поретка дата је са

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{\min\{W_1, W_2, \ldots, W_{1012}\} \le x\} = 1 - P\{\min\{W_1, W_2, \ldots, W_{1012}\} > x\} \\ &= 1 - P\{W_1 > x, W_2 > x, \ldots, W_{1012} > x\} = 1 - P\{W_1 > x\}P\{W_2 > x\}\ldots P\{W_{1012} > x\} \\ &= 1 - (P\{W_1 > x\})^{1012} = 1 - (1 - F_{W_1}(x))^{1012}. \end{aligned}$$

па следи да је функција густине једнака

$$f_X(x) = 1012 f_{W_1}(x)(1 - F_{W_1}(x))^{1011} = 1012(1-x)^{1011}, \quad x \in (0,1).$$

Очекивање случајне величине X једнако је

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 x f_X(x)dx = 1012\int_0^1 x(1-x)^{1011}dx \\
&= 1012 \cdot \mathrm{B}(2,1012) \\
&= \frac{1}{1013}.
\end{aligned}
$$

Други начин: Имамо да је $W_i \sim \mathcal{U}[0,1]$, за $i = 1,2,\ldots,1012$. Тада је

$$
\begin{aligned}
E\left(\min(W_i)\right) &= \int_0^1 P\{\min(W_i) > \mu\}d\mu = \int_0^1 P\{W_1 > \mu\}P\{W_2 > \mu\}\ldots P\{W_{1012} > \mu\}d\mu \\
&= \int_0^1 (1-\mu)^{1012}d\mu = \int_0^1 \mu^{1012}d\mu = \frac{1}{1013}.
\end{aligned}
$$

Одредимо још дисперзију случајне величине X. Вреди да је

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^1 x^2 f_X(x)dx = 1012\int_0^1 x^2(1-x)^{1011}dx \\
&= 1012 \cdot \mathrm{B}(3,1012) \\
&= \frac{1}{507 \cdot 1013}.
\end{aligned}
$$

Коначно, имамо да је

$$
D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{1013}\left(\frac{1}{507} - \frac{1}{1013}\right).
$$

3. Нека случајна величина $X_i\,, i \in \{1,2,...,1000\}$ представља индикатор неисправности i-тог апарата (догађај $\{X_i = 1\}$ значи да је i-ти апарат неисправан, а догађај $\{X_i = 0\}$ значи да је i-ти апарат исправан). Транзистори прегоревају независно, сваки са вероватноћом 0.1, па вероватноћа неисправности апарата износи $p = 1 - 0.9 \cdot 0.9 = 0.19$. Тада $X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.81 & 0.19 \end{pmatrix}$, при чему је $E(X_i) = 0.19$ и $D(X_i) = 0.1539$ за $i \in \{1,2,...,1000\}$.

   Случајна променљива $X = \sum_{i=1}^{1000} X_i$ представља број неисправних апарата у узорку обима 1000 (X има биномну $\mathcal{B}(1000, 0.19)$ расподелу), при чему је (због особина математичког очекивања и дисперзије суме независних случајних величина)

$$
EX = 1000 \cdot 0.19 = 190\,, DX = 1000 \cdot 0.1539 = 153.9\,.
$$

   Број m добијамо решавањем неједначине:

$$
P\left\{X \leq m\right\} \geq 0.985
$$

   Пошто је $n = 1000 > 30$ и $np = 190 > 10$, можемо извршити апроксимацију нормалном $\mathcal{N}(190, 153.9)$ расподелом. Примеримо да

$$
P\left\{X \leq m\right\} = P\left\{0 \leq X \leq m\right\} \approx P\left\{-0.5 \leq Y \leq m + 0.5\right\} = (*)
$$

   где $Y \in \mathcal{N}(190, 153.9)$ расподелу.

$$
\begin{aligned}
(*) &= P\left\{\frac{-0.5-190}{\sqrt{153.9}} \leq \frac{Y-190}{\sqrt{153.9}} \leq \frac{m+0.5-190}{\sqrt{153.9}}\right\} \\
&= \Phi\left(\frac{m-189.5}{\sqrt{153.9}}\right) - \Phi\left(\frac{-190.5}{\sqrt{153.9}}\right) \geq 0.985
\end{aligned}
$$

   Пошто је

$$
\Phi\left(\frac{-190.5}{\sqrt{153.9}}\right) = \Phi(-15.552) \approx 0\,,
$$

$$
\frac{m-189.5}{\sqrt{153.9}} \geq \Phi^{-1}(0.985) = 2.17 \;\Rightarrow\; m \geq 2.17\sqrt{153.9} + 189.5 = 216.42
$$

   Дакле, тражени број m је 217.