Писмени испит из Математике 1 Ц смер РЕШЕЊА **ФЕБ 2022**

1. (25 поена) Нека је дат низ $a_n = \begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \end{cases}$

(а) Доказати да је $a_n = \frac{n}{3n+1}$.

(б) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n^2}$.

а) индукција

$$a_1 = \frac{1}{3\cdot 1+1} = \frac{1}{4} \checkmark$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \overset{\text{и.х}}{=} \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n(3n+4)+1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} =$$

$$= \frac{\cancel{(3n+1)}(n+1)}{\cancel{(3n+1)}(3n+4)} = \frac{n+1}{3(n+1)+1} \checkmark$$

б) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4}+\ldots+\frac{n}{3n+1}}{n^2} \overset{\text{штолц}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{3n+1}}{n^2-(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{3n+1}}{n^2-n^2+2n-1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(3n+1)(2n-1)} = 0 \checkmark$$

2. (25 поена) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\operatorname{arctg} x)^2 - \frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}(x^2)}{x^2}$ $= (*)$

$$(*) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{x^2+1} - \frac{\pi}{2}\frac{2x}{x^4+1}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x^2+1)x} - \frac{\pi}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}(x^4+1)} = 1 - \frac{\pi}{2}$$

Лопитал

3. (25 поена) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x}\right) - |x+2|$.

1° Домен $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

2° парност / непарност

3° нуле / знак (после)

4° асимптоте

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{\pi}{2} - 2, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{\pi}{2} - 2 \quad (x=0 \text{ није в. а.})$$

косе ?

$$\left[\operatorname{arctg} t \sim \frac{\pi}{2},\ t\to+\infty\right]$$

$$\underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)}_{\sim\frac{\pi}{2}\ x\to+\infty} - \underbrace{|x+2|}_{\substack{x+2 \\ y\ +\infty}} \sim \frac{\pi}{2} - x - 2 = \frac{\pi}{2} - 2 - x \longrightarrow y = \frac{\pi}{2} - 2 - x \text{ коса кад } x\to+\infty$$

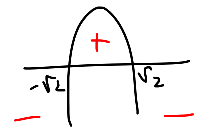
слично $y = x+2-\frac{\pi}{2}$ коса y $-\infty$

(напомена: могли смо и преко формула $k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ...)

5°) f' монотоност (Домаћи: проверити $\left(\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x}\right)' = \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}$

за $x>-2$

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1} - 1 = \frac{x^2+1-x^4+x^2-1}{x^4-x^2+1} = \frac{2x^2-x^4}{x^4-x^2+1} = \frac{x^2(2-x^2)}{x^4-x^2+1}$$



за $x<-2$

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1} + 1 = \frac{x^4+2}{x^4-x^2+1} > 0$$

	-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
f'	$+$		$-$		$+$	$+$		$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\nearrow$		$\searrow$

-2, $\sqrt{2}$ лок макс,

$-\sqrt{2}$ лок минимум

6°) $x>-2$

$$\left(\frac{2x^2-x^4}{x^4-x^2+1}\right)' \overset{\dots}{=} \frac{-2x^5-4x^3+4x}{(x^4-x^2+1)^2}$$

$x<-2$

$$\left(\frac{x^4+2}{x^4-x^2+1}\right)' = \frac{-2x^5-4x^3+4x}{(x^4-x^2+1)^2}$$

$$-2x^5-4x^3+4x = 0 \rightarrow x^5+2x^3-2=0$$

$$x(x^4+2x^2-2)=0$$

$$\rightarrow t^2+2t-2=0$$

$$t_{1|2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 2}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{12}}{2} = \frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2} = -1\pm\sqrt{3}$$

$t_1 = -1-\sqrt{3}$ $\qquad$ $t_2 = -1+\sqrt{3}$

$x^2 = -1-\sqrt{3}$ $\qquad$ $x^2 = -1+\sqrt{3}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $x = \pm\sqrt{\sqrt{3}-1} \doteq \alpha$

$$x^4+2x^2-2<0 \iff t^2+2t-2<0 \iff t\in(-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3})$$

$\Leftrightarrow \quad x^2 \in (-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3})$ тј $\quad x^2 \in (0, -1+\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \quad 0 < x^2 < -1+\sqrt{3} \quad |\sqrt{\ } \quad \rightarrow \quad |x| \leqslant \alpha$

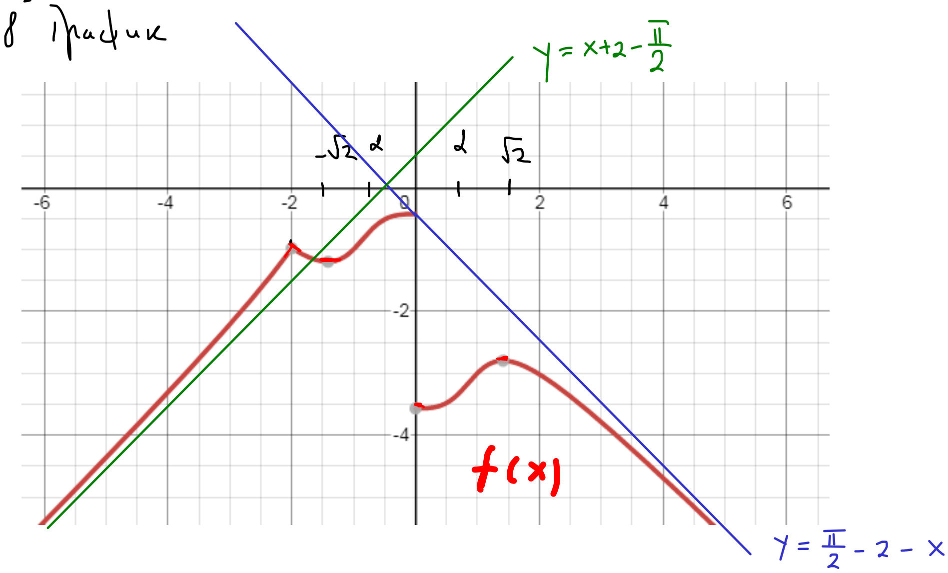
	$-\alpha$		0		α
$-x$	$+$	$+$		$-$	$-$
x^4+2x^2-2	$+$	$-$		$-$	$+$
f''	$+$	$-$		$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$		$\cup$	$\cap$

7° непр ✓

диф свуда осим у -2 (због $|x+2|$)

за домаћи проверити.

8° График



$\boxed{\text{Знак } f < 0.}$

4. (25 поена) Израчунати $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \sin^5 x}{\cos^2 x - 2}\, dx. = I$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin^2 x + \sin^4 x)\sin x}{\cos^2 x - 2}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \ \mid d \\ dt = -\sin x\, dx \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ t & 1 & 0 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{(1-t^2)+(1-t^2)^2}{t^2-2}\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(1-t^2)(1+1-t^2)}{t^2-2}\, dt = -\int_0^1 (1-t^2)\, dt = \int_0^1 (t^2-1)\, dt = \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 1 = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

5. (25 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y' = \frac{x+y}{3x-y}$. .

Ово је хомогена ДЈ $\quad y' = \dfrac{1+\frac{y}{x}}{3-\frac{y}{x}}$

Смена: $\quad z = \dfrac{y}{x}$

$y = zx \to y' = z'x + z$

$z+1-3z+z^2$

$z'x + z = \frac{z+1}{3-z} \to z'x = \frac{z+1-z(3-z)}{3-z} = \frac{z^2-2z+1}{3-z}$

$\int \frac{3-z}{(z-1)^2}\,dz = \int \frac{dx}{x}$, $z \neq 1$ (*)

$-\frac{2}{z-1} - \ln(z-1) = \ln x + c$, $c \in \mathbb{R}$

$-\frac{2}{\frac{y}{x}-1} - \ln\left(\frac{y}{x}-1\right) = \ln x + c$, $c \in \mathbb{R}$

$\to \ln\left(\frac{y}{x}-1\right) - \frac{2x}{x-y} = -\ln x + c$, $c \in \mathbb{R}$

(*) За $z = 1 \to 1 = \frac{y}{x} \to \boxed{y = x}$ Да ли је ово решење?

$1 = \frac{1+1}{3-1} = 1$ ✓ Јесте али није део

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ: $\ln\left(\frac{y}{x}-1\right) - \frac{2x}{x-y} = -\ln x + c$, $c \in \mathbb{R}$ и $y = x$