Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јануар 2021.

1. [10] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.5)

   1.1 [2] скаларни производ и ортогоналност вектора

   1.2 [2] сличност матрица и матрица дијагоналног типа

   1.3 [2] линеарна независност вектора и база векторског простора V

   1.4 [1] линеарни омотач скупа вектора $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$

   1.5 [1] језгро линеарног пресликавања $L : V \longrightarrow W$

   1.6 [2] Нека је V векторски простор и $U, W \leq V$ потпростори векторског простора V. Доказати да је сума потпростора $U + W$ директна (сваки елемент $v \in U + W$ се може на јединствен начин раставити као $v = u + w$, за неке $u \in U$ и $w \in W$) ако и само ако је $U \cap W = \emptyset$.

2. [10] Нека је U потпростор векторског простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима $u_1 = (1, 3, -1, 0, 2)$, $u_2 = (-1, -2, 4, 1, 0)$ и $u_3 = (2, 5, -5, -1, 2)$ и нека је W потпростор векторског простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима $v_1 = (1, 1, -1, 2, -3)$, $v_2 = (2, 3, 1, 5, -4)$ и $v_3 = (-1, 0, 4, -1, 5)$. Одредити бар једну базу и димензију векторских простора U, W, $U + W$ и $U \cap W$. Да ли је сума $U + W$ директна?

3. [10] Нека је оператор $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ дат са $L(a, b, c, d) = (a + d, b - c, a + b, d)$. Доказати да је L линеаран оператор и одредити његово језгро и слику. Наћи матрицу оператора L у бази $E = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

4. [10] Нека је U скуп решења једначине $x + 2y - z - t = 0$. Доказати да је U потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$ и наћи неку његову базу. Грам–Шмитовим поступком ортогонализације од дате базе направити ортогоналну базу потпростора U, користећи стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^4$.

5. [10] Нека су у равни дате праве $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1}$ и $q : y = 2x$. Одредити једначину праве n која садржи тачку пресека правих p и q и нормална је на правој $r : x + 3y - 1 = 0$.

6. [10] Нека је $A : V \longrightarrow V$ линеарни оператор такав да је $V = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$. Доказати да је $V = \operatorname{Ker} A^2 \oplus \operatorname{Im} A^2$.

Време за рад је 180 минута.