Топологија Б, домаћи

1. Нека су A и B потпростори простора X такви да је $intA \cup intB = X$ и $A \cap B \neq \emptyset$.

   (а) Доказати да је V отворен у X ако и само ако је $V \cap A$ отворен у A и $V \cap B$ отворен у B.

   (б) АКо је $i_A : A \to X$ инклузија и $\pi : X \to X/B$ природна пројекција доказати да је $i_A \circ \pi$ количницнко пресликавање.

   (ц) Доказати да је $A/A \cap B \approx X/B$.

2. Ако су X и Y Хауздорфови простори и $f; X \to Y$ непрекидно пресликавање, доказати да су онда и цилиндар и конус пресликавања ф (M_f и C_f) такође Хауздорфови простори.

3. Нека је X простор и $x_0 \in X$ базна тачка (тада кажемо да је (X, x_0) простор са базном тачком). Дефинишемо редуковану суспензију простора X као количницки простор $\Sigma X := (X \times I)/(X \times \{0,1\} \cup \{x_0\} \times I)$. Нека је још и (Y, y_0) простор са базном тачком. Дефинишемо редуковани производ простора X и Y као $X \wedge Y := (X \times Y)/(X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \wedge Y)$. Нека су још $f : X \to Y$ и $f : Z \to W$ непрекидно пресликавање и $f(x_0) = y_0$ и $g(z_0) = w_0$.

   (а) Доказати да су са $\Sigma f([x,t]) = [f(x), t]$ и $f \wedge g([x,z]) = [f(x), g(z)]$ добро дефинисана непрекидна пресликавање $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$ и $f \wedge g : X \wedge Z \to Y \wedge W$.

   (б) Доказати да је $h : \Sigma X \to S^1 \wedge X$ задато са $h([x,t]) = [e^{i2\pi t}, x]$ хомоеморфизам (базна тачка у S^1 је $(1,0)$).

   (ц) Доказати да дијаграм комутира

$$\begin{array}{ccc} \Sigma X & \longrightarrow & \Sigma Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^1 \wedge X & \longrightarrow & S^1 \wedge Y \end{array}$$

4. Нека је $f : S^1 \times I \to X$ непрекидно пресликавање. Ако је $f|_{S^1 \times \{0\}}$ константно доказати да је f хомотопски тривијално.

5. Доказати да простори произвољни простори X и Y имају СФТ ако и само ако њихов букет $X \vee Y$ има СФТ.

6. Нека су $f, g : X \to Y \times Z$ непрекидна пресликавања и нека су $p_1 : Y \times Z \to Y$ и $p_2 : Y \times Z \to Z$ пројекције. Доказати да је $f \simeq g$ ако и само ако је $p_1 \circ f \simeq p_1 \circ g$ и $p_2 \circ f \simeq p_2 \circ g$.

7. Нека је $n \geq 2$ и $h : D^n \to D^n$ хомеоморфизам такав да је $h(x) = x$ за свако $x \in S^{n-1}$. Доказати да постоји хомотопија $H : h \simeq \mathbb{1}(relS^{n-1})$ која је хомеоморфизам на сваком нивоу.

8. Наћи групу G и конструисати њено дејство на $\mathbb{R}^2$ такво да је $\mathbb{R}^2/G \approx M \backslash \partial M$.

9. Нека је $X = \{(p,q) \in S^n \times S^n \mid p \neq -q\}$. Доказати да је $X \simeq S^n$.

10. Доказати да је свако непрекидно пресликавање из Мебијусове траке у просто повезан простор хомотопски тривијално.

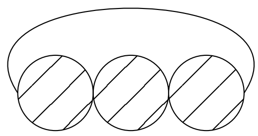
11. Дати су простори X, E и B, фибрација $p : E \to B$ и непрекидно пресликавање $f : X \to B$. Нека је $T \subseteq X \times E$ потпростор задат са $T = \{(x, e) \mid f(x) = p(e)\}$ и нека су π_1 и π_2 пројекције. Нека је дато непрекидно $g : Y \to X$такво да је $f \circ g$ хомотопски тривијалн. Доказати да постоји непрекидно $\phi : Y \to T$ такво да је $\pi_1 \circ \phi = g$.

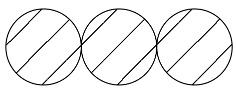
12. Нека је $p : E \to B$ фибрација и нека су $f : X \to B$ и $g : X \to E$ непрекидна пресликавање таква да $p \circ g \simeq f$. Доказати да постоји непрекидно $h : X \to E$ такво да $h \simeq g$ и $p \circ h = f$.

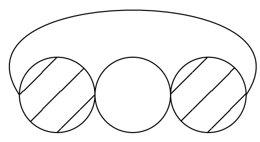
13. Нека је X повезан тополошки простор и $f, g : X \to S^n$ непрекидна пресликавања. Ако ф није хомотопно са g и $-g$ доказати да постоји $x_0 \in X$ такво да је $f(x_0) \perp g(x_0)$.

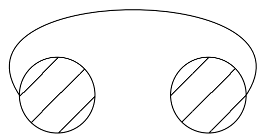
14. Доказати да је простор свих ортогоналних матрица $O(n)$ јако деформациони ретракт простора свих инвертибилних матрица $GL_n(\mathbb{R})$, са топологијом наслеђеном из $\mathbb{R}^{n^2}$.

15. Дат је простор X и три његова потпростора.

$X :$ 







(а) Који од ових потпростора су ретракти од X?

(б) Који од ових потпростора имају СФТ?

(ц) Доказати да је $X \simeq S^1$.

(д) Да ли X има СФТ?

16. Нека је X тополошки простор. Доказати да су следећи искази еквивалентни:

   (а) X је контрактибилан.

   (б) За произвољан простор Y важи $X \times Y \simeq X$.

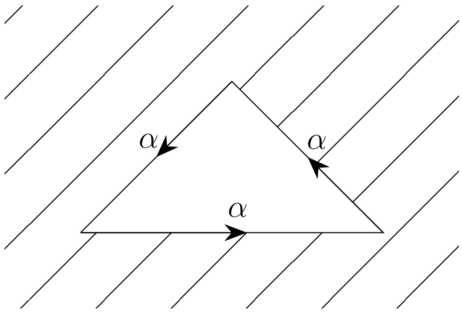
   (ц) $X \times S^1 \simeq S^1$

17. Нека је $S \subseteq \mathbb{R}P^2$ и $|S| = 3$. Нађ $\pi_1(\mathbb{R}P^2/S)$ и $\pi_1(\mathbb{R}P^2 \backslash S)$.

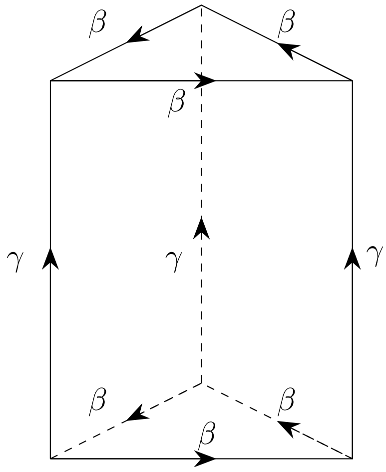
18. Доказати да је фундаментална група простора $GL_n(\mathbb{C})$ бескоанчна.

19. Нека су простори X и Y као са слике и Z доња база призме чији је количник простор Y.

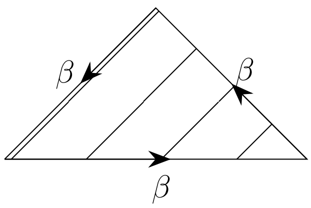
X :



Y :



Z :



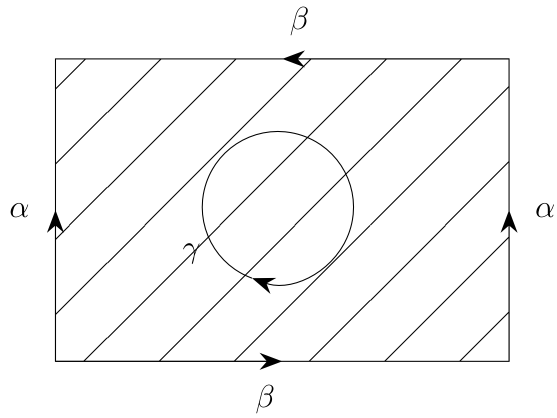
   (а) Наћи фундаменталне групе ових простора.

   (б) Да ли је α (деформациони) ретракт простора X?

   (ц) Да ли је Z (деформациони) ретракт Y?

   (д) Да ли је β (деформациони) ретракт Z?

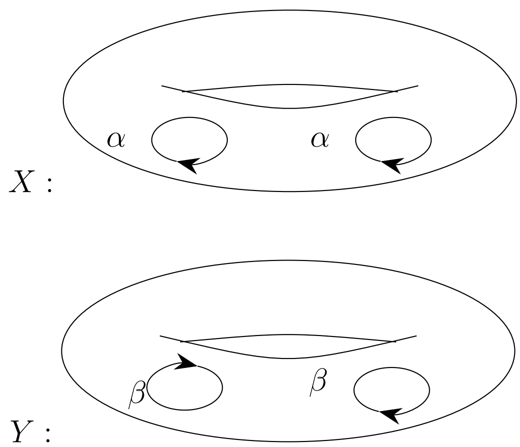
20. На Клајновој боци K уочене су кружнице α, β и γ.



(а) Које од ових кружница су ретракти K.

(б) Да ли је нека од њих деформациони ретракт?

21. Простори X и Y су као на слици.



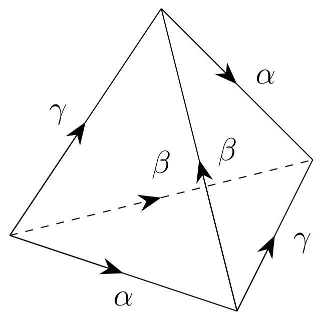
(а) Одредити њихове фундаменталне групе.

(б) Да ли је α ретракт простора X.

(ц) Да ли је β ретракт простора Y.

(д) Испитати да ли је неки од простора X и Y хомеоморфан некој затвореној површи, и ако јесте одредити којој.

22. Простор X је настао идентификацијом наспрамних ивица тетраедра. Израчунати $\pi_1(X)$.



23. Конструисати простор X коме је фундаментална група изоморфна групи $(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_6) * \mathbb{Z}^3$.

24. Испитати да ли постоји наткривање:

    (а) $S^2 \times \mathbb{R}^2 \to S^2 \times T^2$.

    (б) $S^2 \times T^2 \to S^2 \times \mathbb{R}^2$.

    (ц) $S^2 \times S^2 \to S^2 \times T^2$.

    (д) $S^2 \times T^2 \to S^2 \times S^2$.

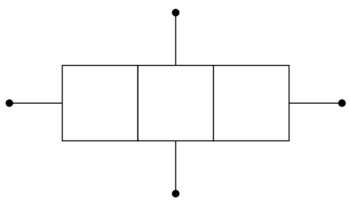
25. Испитати да ли постоји наткривање:

    (а) $\mathbb{R}P^2 \vee S^2 \to S^2 \vee S^2$

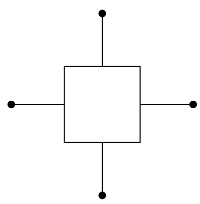
    (б) $S^2 \vee S^2 \to \mathbb{R}P^2 \vee S^2$

26. Дати су простори X, Y и Z. Одредити фундаменталне групе ових простора и утврдити да ли постоје наткривања:

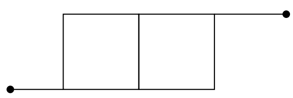
X :



Y :



Z :



    (а) $X \to Y$.

    (б) $X \to Z$.

    (ц) $Y \to Z$.

27. Ако је $n \geq 2$ доказати да је свако непрекидно пресликавање $f : \mathbb{R}P^2 \to S^1$ хомотопски тривијално.