Задаци за вежбање, Алгебра 1 2ЛР, недеља трећа

Задаци би требало да су линеарно уређени по тежини.

1. Наћи све подгрупе и генераторе групе $\mathbb{Z}_{48}$.

2. Наћи број генератора и подгрупа групе $\mathbb{Z}_{4900}$.

3. Доказати да је
$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1+5a & 5b \\ 5c & 1+5d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \right\}$$
нормална подгрупа, коначног идекса, групе
$$SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1 \right\}$$

4. Доказати да је подгрупа $GL(2,\mathbb{R})$ генерисана са $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ изоморфна са $\mathbb{D}_4$.

5. Дати пример праве подгрупе $(\mathbb{Q},+)$ која није циклична.

6. Доказати да $(\mathbb{Q},+)$ нема подгрупу изоморфну са $\mathbb{Z}^n$(Видети коментар).

7. Доказати да свака коначно генерисана група има максималну праву подгрупу.

8. Доказати да су све праве подгрупе групе $Z_{p^\infty}$ (видети задатке за прву недељу) цикличне. Доказати да $Z_{p^\infty}$ није коначно генерисана.

**Коментар!** Нека су $(G,*)$ и $(H,\circ)$ групе. На скупу $G \times H$ дефинишемо операцију са $(a,b)\cdot(c,d) = (a*c, b\circ d)$. У односу на ову операцију $G \times H$ је група. Аналогно дефинишемо $G^n$.