Задаци за вежбање, Алгебра 1 2ЛР, недеља прва

Наредни задаци су "подељени" у две групе. Задаци 1-4 представљају основни ниво градива и треба да послуже за проверу разумевања градива пређеног на вежбама. Задаци 5-9 представљају напредни ниво градива и намењени су заинтересованијим читаоцима ради дубљег упознавања са материјом. Ово свакако не треба да обесхрабри читаоца, већ је свима препоручено да покушају да ураде све задатке.

1. Испитати да ли је $(Z, *)$, где је операција $*$ дефинисана са

$$m * n = \begin{cases} m+n & \text{ако } m = 2k \\ m-n & \text{ако } m = 2k+1 \end{cases}$$

   група.

2. Нека је $(G, \circ)$ група и $g \in G$ произвољан фиксирани елемент. Уколико је операција $*$ дефинисана са

$$x * y = x \circ g \circ y$$

   испитати да ли је $(G, *)$ група.

3. Нека је $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ бијекција и нека је операција $*$ дефинисана са

$$x * y = g^{-1}(g(x) + g(y))$$

   Доказати да је $(\mathbb{R}, *)$ група.

4. Уколико је $(G, \cdot)$ група таква да је $x^2 = e$ за свако $x \in G$ тада је група G Абелова.

5. Кажемо да је Абелова група $(G, *)$ *дељива* уколико за свако $a \in G$ и $n \in \mathbb{N}$ постоји $b \in G$ такво да је $b^n = a$. Доказати да је $(Z_{p^\infty} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ такво да } z^{p^n} = 1\}, \cdot)$ Абелова група и да је дељива.

6. Нека су a и b елементи групе G такви да је $a^2 = e$ и $a^{-1}b^2a = b^3$. Доказати да је тада $b^5 = e$.

7. Уколико је $(G, *)$ коначна полугрупа у којој важе закони скраћивања ($ab = ac \implies b = c$ и $ba = ca \implies b = c$) тада је $(G, *)$ група.

8. Уколико је $(G, *)$ коначна полугрупа у којој важи $ab = ca \implies b = c$ тада је $(G, *)$ Абелова група.

9. Нека је на скупу G дефинисана операција $\cdot$ и постоји неутрални елемент $e \in G$. Доказати да постоји максималан подскуп $H \subseteq G$ такав да је $(H, \cdot)$ група.