

Задаци 1-3 су лаки, а задаци 4-6 су средње тежине. Задаци од 7. надаље нису превише тешки али су ван подразумеваног градива, те су намењени заинтересованијим студентима.

1. Одредити остатак при дељењу $123^{456^{789}}$ са 11.

2. Решити систем

$$x \equiv_5 3$$

$$x \equiv_{19} 4$$

$$x \equiv_{11} 8$$

3. Дати пример групе реда pq , за различите просте бројеве p и q , која није циклична.

4. Нека су H и K подгрупе групе G . Доказати да је

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$

5. Израчунати

$$\sum_{k < n, (k, n) = 1} k$$

6. Доказати да је $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ за природне бројеве m и n за које је $(m, n) = 1$.

Мултипликативна аритметичка функција је функција $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ таква да за узајамно просте бројеве m и n важи $f(mn) = f(m)f(n)$. *Дирихлеова конволуција* две МАФ дефинисана је са

$$f * g = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

7. Доказати да су следеће функције МАФ

$$(a) \varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

$$(б) \mathbb{1}(n) = 1$$

$$(ц) I(n) = n$$

$$(д) \mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & n = p_1 p_2 \cdots p_k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

8. Доказати да је $*$ комутативна, асоцијативна операција и да је за две МАФ f и g $f * g$ такође МАФ. Доказати да је ε неутрал за ову операцију и да су μ и $\mathbb{1}$ међусобно инверзни.

9. *Мебијусова теорема инверзије* $F = \mathbb{1} * f$ ако и само ако $f = \mu * F$.

10. Нека је $\tau(n)$ број делилаца броја n . Доказати да је τ МАФ.

11. Доказати да је $\varphi = I * \mu$.¹

12. Одредити инверзе φ и τ у односу на операцију $*$.

¹Приметимо да одавде следи да је φ МАФ, одакле следи решење 6. задатка.