Задаци за вежбање, Алгебра 1 2ЛР, недеља осма

Задаци би требало да су линеарно уређени по тежини.

1. Нека су

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

и

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

пермутације из S_6. Одредити знак за f, g и $f^2 g^2$.

2. Нека су дате пермутације $f = \lfloor 1,3,5,7 \rceil \lfloor 2,4,6,8 \rceil \lfloor 1,2,3,4,5,6,7,8 \rceil$ и

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Одредити знак за пермутације f, g и $(f^3 g)^{2020}$.

3. Нека су дате пермутације $f = \lfloor 6,4,5,2 \rceil \lfloor 8,4,5,2,6 \rceil \lfloor 1,2,3,4,5,6,7,8,9 \rceil$ и

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 5 & 3 & 4 & 8 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Одредити знак за пермутације $f, g, (f^{\omega(g)} g^{\omega(f)})^{2020}$. Одредити редове група $< f > \cap A_n$ и $< (f^{\omega(g)} g^{\omega(f)})^{2020} > \cap A_n$.

4. Колико елемената има најмањи генераторни скуп групе S_n?

5. (а) Нека је $f = ts$ производ две транспозиције и $s(a) \neq a$. Тада је $f = \varepsilon$ или је $f = t's'$ производ две транспозиције такве да је $t'(a) \neq a$ и $s'(a) = a$.
   (б) Нека је $\varepsilon = \prod_{i=1}^{k} t_i$ производ транспозиција. Тада се ε може записати и као производ $k-2$ транспозиције.
   (ц) Нека је $\varepsilon = \prod_{i=1}^{k} t_i$ производ транспозиција. Тада је k паран број.
   (д) Нека је $\prod_{i=1}^{k} t_i = \prod_{i=1}^{l} s_i$ где су t_i, s_i транспозиције. Тада је $k \equiv_2 l$.

6. Доказати да је за $n \geq 5$ група A_n генерисана скупом $X = \{\lfloor a,b \rceil \lfloor c,d \rceil \mid a,b,c,d$ су различити$\}$.

7. Доказати да је A_n генерисано скупом $X = \{\lfloor 1,2,i \rceil \mid 2 < i \leq n\}$.

8. Да ли у групи S_n има више елемената парног или непарног реда?

9. Доказати да је $SL_n(\mathbb{R}) \triangleleft GL_n(\mathbb{R})$.

10. Одредити нормалне подгрупе S_4.

11. Уколико је $H \triangleleft G$ и $K \leq G$ тада је $HK \leq G$ и $H \cap K \triangleleft G$.