

Задачи за вежбање, Алгебра 1 2ЛР, недеља друга

Задачи су "подељени" у три групе: лаки 1-3, средњи 4-6 и тежи 7-9.

1. Нека је $GL(n, \mathbb{R})$ група свих инвертибилних матрица реда n са реалним коефицијентима. Који од наредних скупова су подгрупе $GL(n, \mathbb{R})$?

(а) $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$

(б) $U = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$

(ц) $V = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A < 0\}$

(д) $W = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A \in \mathbb{Q}\}$

(е) $Z = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A \in \mathbb{Z}\}$

Која од датих подгрупа је нормална?

2. Одредити све подгрупе групе \mathbb{D}_5 .
3. Доказати да уколико је G група реда n и $H \leq G$ тада $|H| \neq n - 1$.
4. Нека је G Абелова група. Доказати да су $H = \{g \in G \mid g^2 = e\}$ и $K = \{g^2 \mid g \in G\}$ подгрупе групе G .
5. Нека су $H, K \leq G$. Испитати када је $K(H \cup K)$ подгрупа G .
6. Доказати да уколико је H подгрупа $(\mathbb{Q}, +)$ са својством да за свако $x \neq 0 \in H$ $\frac{1}{x} \in H$ тада је $H = \{0\}$ или $H = \mathbb{Q}$.
7. Одредити, у зависности од n , све подгрупе групе $(\mathbb{Z}_n, +)$.
8. Нека је G Абелова група. Доказати да је $T(G) = \{g \in G \mid \exists n \in \mathbb{N} \ g^n = e\}$ подгрупа групе G (ово зовемо *торзиона подгрупа групе G*). Дати пример када ово не мора да важи, у случају некомутативне групе.
9. Кажемо да је Абелова група торзионо слободна уколико нема торзије, односно ако је њена торзиона подгрупа тривијална. Доказати да свака торзионо слободна и дељива група има подгрупу изоморфну (видети коментар на крају) са $(\mathbb{Q}, +)$. Доказати да је свака торзионо слободна и дељива група кардиналности 2^{\aleph_0} изоморфна са $(\mathbb{R}, +)$.

Коментар! Кажемо да су две групе изоморфне уколико између њих постоји изоморфизам, односно бијективни хомоморфизам. Ово ћемо детаљније изучавати у току курса. За сада, идеја изоморфних група могу да буду две групе које су "исте", односно можемо идентификовати њихове структуре група.