Задаци за вежбање, Алгебра 1 2ЛР, недеља четврта

Прва три задатка су лакша. За остале задатке аутор није могао да се одлучи колико су тешки.

1. Одредити редове елемената $a^{22}$ и $a^{789}$ у групи $G =< a >$ реда $|G| = 1996$. Уколико је $|H| = 1997$ и $H =< b >$ испитати за које $k$ је са $f(a^{11}) = b^k$ је добро дефинисан хомоморфизам $f : G \to H$.

2. Нека је $G =< a >$ и $|G| = 33263$. Одредити $< a^{27063} > \cap < a^{15438} >$.

3. Дата је матрица
$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$
и група $H =< A >$.
   (а) Одредити ред групе $H$.
   (б) Одредити генераторе свих подгрупа групе $H$.
   (ц) Колико има хомоморфизама $f : H \to \mathbb{Z}_5$?

4. Нека је $G$ коначна група чији је ред дељив са 5 и $S$ скуп свих елемената реда 5 у $G$. Доказати да је $|S|$ природан број дељив са 4.

5. (а) Доказати да је $\mathbb{Z}_n^* = \{m \in \mathbb{Z}_n \mid (m, n) = 1\}$ група у односу на множење по модулу $n$.
   (б) Уколико је $p$ прост број доказати да је $a^p \equiv_p a$.

6. Доказати да је $(\mathbb{R}, +)^2$ изоморфно са $(\mathbb{C}, +)$. Доказати да $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)^2$ није изоморфно са $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$.

7. Нека је $G$ Абелова група и $a, b \in G$. Доказати да постоје $\alpha_1$ и $\alpha_2$ такви да је $\rho(a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}) = [\rho(a), \rho(b)]$.

8. Нека је $g \in G$ елемент реда $n$ и $n = n_1 n_2$ где је $(n_1, n_2) = 1$. Доказати да се $g$ на јединствен начин може представити у облику $g = g_1 g_2$ где је $\rho(g_1) = n_1$ и $\rho(g_2) = n_2$ и $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

9. Доказати да је мултипликативна група коначног поља циклична.