ANALIZA I DIZAJN ALGORITAMA II
zadaci sa vežbi

Vesna Pavlović

09. novembar 2010.

6 Probabilistički algoritmi

1. *Problem zapošljavanja*: želimo da zaposlimo novog radnika koristeći usluge agencije za zapošljavanje. Agencija svakog dana šalje po jednog kandidata i nakon razgovora odlučujemo da li želimo da ga zaposlimo. Agenciji plaćamo malu naknadu za intervjuisanje kandidata, dok pri zapošljavanju plaćamo dosta veću naknadu - treba da otpustimo tekućeg radnika i da platimo visoku naknadu agenciji za zapošljavanje novog radnika. Želimo da u svakom trenutku imamo najbolju osobu za posao. Stoga, nakon svakog intervjua ako je novi kandidat bolje kvalifikovan od tekućeg radnika otpuštamo tekućeg radnika i zapošljavamo novog kandidata. Spremni smo da platimo cenu ove strategije ali želimo da je procenimo.

```
Algoritam Zaposljavanje_radnika
Ulaz: niz od n kandidata
Izlaz: best - najbolji kandidat

begin
   best:=0;
   for i=1 to n
      intervjuisi kandidata(i);
      if bolji(i,best)
         best:=i;
         zaposli_kandidata(i);
end
```

   (a) Pod pretpostavkom da je cena intervjuisanja c_i, a cena zapošljavanja c_z, odrediti ukupnu cenu algoritma u najgorem slučaju i u prosečnom slučaju.
   (b) Odrediti očekivani broj puta koji zapošljavamo novog radnika.
   (c) Koja je verovatnoća samo jednog zapošljavanja?

(d) Koja je verovatnoća zapošljavanja n puta?

(e) Koja je verovatnoća zapošljavanja 2 puta?

2. Na raspolaganju nam je procedura `Pristrasni_random` koja vraća 0 ili 1 i to: 1 sa verovatnoćom p, a 0 sa verovatnoćom $1-p$, gde je $0 < p < 1$, pri čemu ne znamo vrednost za p. Konstruisati algoritam koji koristi datu proceduru kao primitivu i kao izlaz daje nepristrasni odgovor - tj. daje 0 sa verovatnoćom 1/2 i 1 sa verovatnoćom 1/2. Koje je očekivano vreme izvršavanja u funkciji od p?

```
Algoritam Nepristrasni_random
Izlaz: 0 sa verovatnocom 1/2 i 1 sa verovatnocom 1/2

begin
   while(1)
   do
      x:=Pristrasni_random();
      y:=Pristrasni_random();
      if (x!=y)
         return x;
end
```

3. Neka je A niz od n različitih brojeva. Ako je $i < j$ i $A[i] > A[j]$ onda par (i, j) zovemo inverzijom od A. Pod pretpostavkom da je svaki element iz A izabran nezavisno na slučajan način i uniformno na domenu 1 do n izračunati očekivani broj inverzija.

4. Posmatramo proces ubacivanja n identičnih loptica u b kutija (numerisanih sa $1, 2, \ldots, b$) na slučajan način. Ubacivanja su nezavisna i jednako je verovatno da loptica završi u svakoj od kutija.

   (a) Koliki je očekivani broj loptica u svakoj od kutija?

   (b) Koliki je očekivani broj ubacivanja loptica potreban da bi u datu kutiju bila ubačena loptica?

   (c) Koliki je očekivani broj ubacivanja loptica potreban da bi svaka od kutija sadržala barem po jednu lopticu?

5. Na raspolaganju nam je procedura koja za proizvoljno k, $1 \leq k \leq n$, generiše slučajne brojeve iz opsega od 1 do k sa uniformnom raspodelom verovatnoća. Konstruisati algoritam za generisanje slučajne permutacije brojeva $\{1, 2, \ldots, n\}$ sa uniformnom raspodelom verovatnoća.

6. Neka je E zadati niz brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Višestrukost broja x u E je broj pojavljivanja broja x u E. Odrediti element $x \in E$ višestrukosti veće od $n/2$ ("preovladjujući element") ili ustanoviti da takav element ne postoji. Složenost algoritma treba da je $O(n)$.

7. Dat je skup M. r-*bojenje* skupa M je preslikavanje $c : M \to \{1, 2, \ldots, r\}$. Kažemo da je podskup $X \subset M$ *monohromatski* ako su svi elementi iz X obojeni istom bojom, tj. $\forall x, y \in X$ važi: $c(x) = c(y)$.

   Neka nam je data familija $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_s\}$ tako da je $|F_i| = k$ i $F_i \subset M$, $\forall 1 \leq i \leq s$. Dokazati da ako je $s < r^{k-1}$ onda postoji takvo r-bojenje da nijedan skup F_i nije monohromatski.

8. *Ramsey-ev broj* $R(k)$ broja k je najmanji prirodan broj takav da svaki graf sa najmanje $R(k)$ čvorova sadrži ili kompletan graf sa k čvorova ili nezavisan skup od k čvorova.

   Dokazati da je: $R(k) \geq 2^{k/2-1}$.