ANALIZA I DIZAJN ALGORITAMA II
zadaci sa vežbi

Vesna Pavlović

16. novembar 2010.

7 Grafovi - problem uparivanja

1. Dat je bipartitni graf $G = (V, U, E)$ sa skupovima čvorova $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ i $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i skupom grana $E = \{(a, 1), (a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 2), (b, 6), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 7), (d, 1), (d, 2), (e, 4), (f, 5), (g, 6)\}$. Naći optimalno uparivanje u ovom grafu.

2. Konstruisati algoritam linearne složenosti za odredjivanje optimalnog uparivanja u stablu.

3. Konstruisati algoritam složenosti $O(|V|^2)$ za nalaženje savršenog uparivanja u vrlo gustom grafu, tj. grafu sa $2n$ čvorova takvom da za svaka dva njegova nesusedna čvora u i v važi: $d(u) + d(v) \geq 2n$.

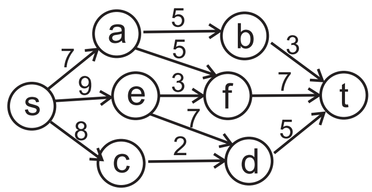
4. Zadat je težinski bipartitni graf $G = (V, E)$ sa n čvorova i m grana. *Kritična težina* uparivanja M (u grafu G) je težina najteže grane u uparivanju M. Konstruisati algoritam složenosti $O(\sqrt{n}(m+n) \log m)$ za nalaženje optimalnog uparivanja sa minimalnom kritičnom težinom.

5. *Pokrivač grana* neusmerenog grafa $G = (V, E)$ je skup čvorova U takav da je svaka grana iz E susedna bar jednom čvoru iz U. Konstruisati algoritam linearne složenosti za nalaženje najmanjeg pokrivača grana datog stabla.

6. Konstruisati algoritam koji za dati graf $G = (V, E)$ utvrdjuje da li sadrži podskup čvorova U koji je istovremeno i minimalni pokrivač grana i maksimalni nezavisni skup (tj. ne postoji grana izmedju bilo kojih od čvorova).

8 Transportne mreže

1. Dat je usmeren graf $G = (V, E)$ sa dva izdvojena čvora s i t. Granama grafa pridruženi su brojevi - njihovi kapaciteti. Odrediti optimalni tok kroz mrežu.



2. Transportna mreža može imati više izvora i ponora, umesto po jednog. Rešiti problem maksimizacije toka u ovom slučaju.

3. Profesor Krstić ima dvoje dece koja nažalost ne vole jedno drugo. Problem je toliko ozbiljan da ne samo da odbijaju da zajedno idu do škole već ne žele da prodju nijednim delom puta kojim je drugo dete toga dana prošlo. Ipak, ne smeta im da im se putevi ukrštaju na uglu. Srećom i profesorova kuća i škola su na uglu, ali on nije siguran da li je moguće da pošalje oba deteta u istu školu. Profesor ima mapu svoga grada. Pokazati kako se ovaj problem može formulisati u terminima maksimizacije toka.

4. *Povezanost neusmerenog grafa* $G = (V, E)$ je minimalni broj k grana koje se moraju ukloniti da bi graf postao nepovezan. Na primer, povezanost je jednaka 1 za stablo, a 2 za ciklus. Pokazati kako je moguće ovaj problem rešiti pokretanjem algoritma za odredjivanje maksimalnog toka na maksimalno $|V|$ različitih mreža, pri čemu svaka od njih ima $O(|V|)$ čvorova i $O(|E|)$ grana.

5. Neka je $G = (V, E)$ transportna mreža sa izvorom s, ponorom t i celobrojnim kapacitetima. Pretpostavimo da nam je poznat maksimalni tok u G.

   (a) Pretpostavimo da je kapacitet jedne grane $(u, v) \in E$ povećan za 1. Dati algoritam složenosti $O(|V| + |E|)$ za ažuriranje maksimalnog toka.

   (b) Pretpostavimo da je kapacitet jedne grane $(u, v) \in E$ smanjen za 1. Dati algoritam složenosti $O(|V| + |E|)$ za ažuriranje maksimalnog toka.

6. Bipartitni graf $G = (V, E)$, gde je $V = L \cup R$, je *d-regularan* ako svaki čvor $v \in V$ ima stepen tačno d.

   (a) Pokazati da za svaki d-regularni bipartitni graf važi: $|L| = |R|$.

   (b) Svesti problem odredjivanja maksimalnog d-regularnog bipartitnog uparivanja na problem odredjivanja maksimalnog toka u mreži. Pokazati da je maksimalna vrednost toka u toj formulaciji $|L|$.

   (c) Dokazati da svaki d-regularni bipartitni graf ima uparivanje kardinalnosti $|L|$.

7. Potrebno je uneti brojeve u $n \times n$ matricu sa celobrojnim vrednostima izmedju 0 i granice k, tako da suma svih brojeva u svakoj vrsti, odnosno koloni, bude jednaka jednom od $2n$ brojeva datih unapred. Npr sledeća instanca:

$$\begin{array}{c}
\\ 6 \\ 9 \\ 11
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 17 & 5 & 4 \end{array} \\
\begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}
\end{array}$$

za $k = 9$ ima rešenje:

$$\begin{array}{c}
\\ 6 \\ 9 \\ 11
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 17 & 5 & 4 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Formulisati i rešiti ovaj problem kao problem maksimizovanja toka.