AISP - čas 1

Božica Kalinić

October 2020

Matematička indukcija

1 Princip matematičke indukcije

Ako je potrebno dokazati tvrdjenje $T(n)$, $n \in N$, dovoljno je pokazati:

1. *Bazu indukcije:* $T(1)$
2. *Induktivni korak:* $T(n-1) => T(n), n \in N \setminus \{1\}$

2 Primeri

1. Indukcijom pokazati da za Fibonačijeve brojeve važi
$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}, \forall n \in N$$
2. Indukcijom pokazati da za Fibonačijeve brojeve važi
$$F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n, \forall n \in N \setminus \{1\}$$
3. Pokazati da za svaka tri susedna priodna broja važi da je suma njihovih kubova deljiva sa 9, tj.
$$9 \mid (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3, n \in N \setminus \{1\}$$
4. Dokazati korektnost algoritma binarne pretrage u kome se pronalazi indeks prvog elementa u neopadajužem nizu celih brojeva čija je vrednost jednaka nuli.
5. Dokazati korektnog algoritma koji za zadati rastuće sortirani niz prirodnih brojeva, pronalazi prvi prirodan broj koji nije jednak zbiru ni jednog podskupa datog niza.
6. Indukcijom pokazati da je svaka hiperkocka 2-obojiva (u smislu bojenja čvorova).
7. Indukcijom pokazati da za svaku hiperkocku dimenzije $n \geq 2$, postoji Hamiltonov ciklus.

3 Rešenja

1. Fibonačijevi brojevi su definisani preko sledećih rekurentnih jednačina:

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \in N \setminus \{1\}$$

Baza indukcije: n=1
Treba da pokažemo $F_1^2 = F_1 F_2$, tj. $1^2 = 1 \cdot 1$, što je tačno.
Induktivni korak:

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_i^2 = F_{n-1}F_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_i^2 = F_{n-1}F_n$$

Dodavanjem F_n^2 na obe strane jednakosti dobijamo:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_{n-1}F_n + F_n^2.$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n(F_{n-1} + F_n).$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

2. Baza indukcije: n=2

$$F_1 F_3 = F_2^2 + (-1)^2$$

$$1 \cdot 2 = 1^2 + 1$$

$$2 = 1 + 1$$

Induktivni korak: $n \Rightarrow n+1$

$$F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$$

$F_n F_{n+2} = F_n(F_n + F_{n+1}) = F_n^2 + F_n F_{n+1} = F_n^2 + F_n F_{n+1} + F_{n-1}F_{n+1} - F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) - F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2 - F_{n-1}F_{n+1}$.
Na osnovu induktivne hipoteze dobijamo:
$F_n^2 + F_{n+1}^2 - F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2 - F_n^2 - (-1)^n = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$

3. Baza indukcije n=2:
$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$ i važi da $9 \mid 36$.
Induktivni korak: $n \Rightarrow n+1$
$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = n^3 + (n+1)^3 + ((n-1)+3)^3 = n^3 + (n+1)^3 + (n-1)^3 + 3(n-1)^2 \cdot 3 + 3(n-1)3^2 + 3^3$.
Na osnovu induktivne hipoteze važi $9 \mid n^3 + (n+1)^3 + (n-1)^3$. Možemo da zaključimo da $9 \mid 3(n-1)^2 \cdot 3 + 3(n-1)3^2 + 3^3$, jer taj izraz možemo zapisati kao $9(n-1)^2 + 9(n-1)3 + 9 \cdot 3$.

4. **Algoritam Nadji_prvu_nulu**:
Ulaz:
$a = a_1, a_2, ..., a_n$ (neopadajući niz celih brojeva)
n (prirodan broj koji predstavlja dužinu niza a)
Izlaz:
Ako niz ima barem jedan element čija je vrednost nula tada algoritam vraća: $k \in \{1, ..., n\}$ td. $(a_k = 0 \wedge \neg\exists i \in \{1, 2, ..., k-1\} a_i = 0)$.
Ako niz nema takav element algoritam vraća 0.

```
begin
l := 1;
d := n;
while l <= d do
    s := l + ⌊(d−l)/2⌋;
    if a_s = 0 do
        if s = 1 do
            return 1;
        else if a_{s−1} = 0 do
            d := s − 1;
        else do
            return s;
    else if a_s > 0 do
        d := s − 1;
    else do
        l := s + 1;
return 0;
end
```

Dokaz korektnosti:
Prelomna tačka niza za uslov $u(a_i)$ *je indeks elementa niza* $(i \in \{1, 2, .., n\})$ *t.d.* $(\forall j \in \{1, 2, .., i-1\}) \neg u(a_j) \wedge (\forall j \in \{i, i+1, ..., n\}) u(a_j)$.
Pokazaćemo korektnost algoritma Nadji_prvu_nulu tako što ćemo pokazati da je izlaz iz algoritma prelomna tačka za uslov $u(a) : a \geq 0$.
Tokom algoritma održavamo dve promenljive $l \in \{1, ..., n\}$ i $d \in \{1, ..., n\}$.

- Elementi u intervalu $[1, l)$ ne zadovoljavaju uslov u.
- Elementi u intervalu $(d, n]$ zadovoljavaju uslov u.
- Za elemente u intervalu $[l, d]$ ne znamo još da li ispunjavaju uslov u.

Želimo da pokažemo da će u svakom koraku petlje važiti gore navedene tačke.
Na početku ni za jedan element ne znamo da li ispunjava uslov, čime je početni interval $[l, d] = [1, n]$.
Intervali $[1, l)$ i $(d, n]$ su prazni, pa je invarijanta očuvana tj. ispunjeni su gore navedeni uslovi.
Ako $l \leq d$ onda koristimo promenljivu $s = l + \lfloor \frac{(d-l)}{2} \rfloor$.
Ako s zadovoljava uslov u, tada na osnovu monotonosti niza i svi elementi desno od s zadovoljavaju taj uslov. Time nastavljamo pretragu levo od s, tj. $d = s - 1$.
Analogno, ako s ne zadovoljava uslov u, tada na osnovu monotonosti niza ni jedan element levo od s ne zadovoljava taj uslov. Time pretragu nastavljamo desno od s, tj. $l = s + 1$.
S obzirom da su nove vrednosti l i d definisane preko s, biće ispunjene gore navedene tačke.
Pretraga traje sve dok je $l \leq d$, tj. $l = d + 1$. S obzirom da su ispunjeni uslovi da elementi u intervalu $[1, l)$ ne zadovoljavaju uslov, a da elementi u intervalu $(d, n]$ zadovoljavaju uslov, i da je l = d+1, dobijamo da je indeks l prelomna tačka niza, jer je $[1, l) \cup (d, n] = [1, n]$.

5. Ideja rešenja:
Iterativno ćemo rešiti problem, tako što ćemo održavati gornje ograničenje x tako da sve prirodne brojeve u intervalu [0, x] možemo predstaviti kao sumu elemenata nekog podskupa niza. U trenutku kad dodamo element niza t.d. za njega važi da je veći od sume prethodno dodatih elemenata uvećane za jedan, tada smo pronašli traženi prirodan broj koji ne možemo predtaviti na gore naveden način. Traženi broj je jednak vrednosti sumi prethodno učitanih elemenata uvećanoj za jedan.
Algoritam Nadji_n:
Ulaz:
$c_1, c_2, ..., c_n$ (vrednosti rastuće sortiranog niza prirodnih brojeva)
n (dužina datog niza)
Izlaz:
x prvi prirodan broj t.d. $(\neg\exists S \subseteq \{c_1, c_2, ..., c_n\}) \sum_{j \in S} j = x$ **begin**
$i := 1;$
$suma := 0;$
while $i <= n$ **do**
    if $c_i > suma + 1$ **do**
        return $suma + 1;$
    $i := i + 1;$
    $suma := suma + c_i;$
return $suma + 1;$
end

Dokažimo korektnost algoritma.
Invarijana petlje (tj. tvrdnju koju želimo da dokažemo u svakom koraku algoritma) je da sve brojeve iz intervala $[0, suma]$ možamo zapisati kao

sumu elemenata nekog podskupa datih brojeva, gde promenljiva suma ima vrednost zbira do sada obradjenih elemenata petlje.
Nulu možemo dobiti kao zbir elemenata praznog skupa.
Neka tvrdjenje važi u k-tom koraku petlje, tj. sve brojeve iz segmenta $[0, \sum_1^k c_k]$ možemo predstaviti kao sumu elemenata nekog podskupa datog niza.
Razmatramo c_{k+1}.
Ako je $c_{k+1} > \sum_{i=1}^k c_k + 1$. Tvrdimo da je $\sum_{i=1}^k c_k + 1$ traženi broj koji ne možemo predtaviti na traženi način.
Na osnovu invarijante petlje pokriveni su svi brojevi manji od $\sum_{i=1}^k c_k + 1$. Ostalo je da pokažemo da se $\sum_{i=1}^k c_k + 1$ ne može predstaviti kao suma nekog podskupa datih brojeva. Pošto je niz sortiran rastuće, svi elementi c_j, $j > k + 1$ su veći od $c_k + 1$. Time ne mogu da učestvuju u traženom podskupu čije ćemo elemente sabirati, jer je $c_j > c_{k+1} > \sum_{i=1}^k c_k + 1$.
Zato razmatramo samo zbirove koji mogu nastati preko prvih k elemenata. Medjutim pošto razmatramo broj $\sum_{i=1}^k c_k + 1 > \sum_{i=1}^k c_k$ ne možemo odabraniti ni jedan takav podskup. Prema tome traženi broj je $\sum_{i=1}^k c_k + 1$ traženi broj.
Ako je $c_{k+1} <= \sum_{i=1}^k c_k + 1$, tvrdimo da sve brojeve iz intervala $[0, \sum_{i=1}^{k+1} c_i]$ možemo predstaviti kao zbir nekog podskupa prvih k+1 elemenata. Na osnovu invarijante petlje to možemo da uradimo za elemente iz intervala $[0, \sum_{i=1}^k c_i]$. Ostalo je pokažemo da to važi i za elemente u intervalu $(\sum_{i=1}^k c_i, \sum_{i=1}^k c_i]$. Kad od svakog broja iz preostalog intervala oduzmemo novo dodat broj c_{k+1}, dobijamo brojeve koji su manji ili jednako od $\sum_{i=1}^k c_i$. Prema tome se na osnovu invarijante petlje mogu predstaviti kao suma elemeneata nekog podskupa brojeva $c_1, ..., c_k$. Da bismo predstavili brojeve iz $(\sum_{i=1}^k c_i, \sum_{i=1}^k c_i]$ kao sume nekog podskupa brojeva $c_1, ..., c_k, c_{k+1}$, na podskupove dobijene invarijantom ćemo uključiti i c_{k+1}.

6. Hiperkocka dimenzije n se definiše induktivno na sledeći način:
Hiperkocka dimenzije 0 je jedan čvor.
Hiperkocka dimenzije 1 čine dva povezana čvora.
Hiperkocka dimenzije n se dobija od dve hiperkocke dimenzije n-1, H koju čine čvorovi $h_1, h_2, ..., h_{2^{n-1}}$, K koju čine čvorovi $k_1, k_2, ..., k_{2^{n-1}}$, tako što se osim postojećih grana dodaju i grane $(h_i, k_i), i \in \{1, 2, ..., 2^{n-1}\}$.
Intuitivno hiperkocke možemo zamisliti kao kocke u n-dimenzionalnom prostoru. Hiperkocka dimenzije 2 je duž. Hiperkocka dimenzije 3 je standardna kocka itd.

   Rešenje:
Dokazaćemo tvrdjenje indukcijom po dimenziji kocke. Hiperkocka dimenzije 0 je obojiva sa 2 boje. Hiperkocka dimenzije 1 je obojiva sa 2 boje. Hiperkocku dimenzije n ćemo obojiti, tako što ćemo odvojeno obojiti hiperkocke dimenzije n-1 od kojih je sačinjena. Prvu hiperkocku

obojićemo rekurzivno, a drugo suprotno u odnosu na prvu obojenu hiperkocku dimenzije n-1. Da li je ovo bojenje pravilno?
Grane u zasebnim hiperkockama ne spajaju dva isto obojena čvora na osnovu induktivne hipoteze.
Preostaje nam da proverimo grade koje povezuju uparene čvorove dve hiperkocke.
S obzirom da smo drugu kocku obojili suprotno u odnosu na prvu, grana koja spaja dva uparena čvora će spajati čvorove suprotne boje. Time smo pokazali da je bojenje pravilno.

7. Baza Indukcije n=2: Za kvadrat v_1, v_2, v_3, v_4, Hamiltonov ciklus čini npr. ciklus v_1, v_2, v_3, v_4, v_1.
   Induktivni korak $n-1 \Rightarrow n$:
   Pretpostavimo da hiperkocka dimenzije $n-1$ ima Hamiltonov ciklus $v_1, v_2, ..., v_{2^{n-1}}$. Neka se naša n dimenziona hiperkocka sastoji od dve n-1 dimenzione hiperkocke H i K sa Hamiltonovim ciklusima $h_1, h_2, ..., h_{2^{n-1}}$ i $k_1, k_2, ..., k_{2^{n-1}}$. S obzirom da grane u hiperkockama nisu usmerene, to znači da možemo u obrnutom smeru da obidjemo Hamiltonov ciklus hiperkocke K, tj. da i $k_{2^{n-1}}, .., k_2, k_1$ čini Hamiltonov ciklus. Pošto su h_1 i k_1 povezani, kao i $h_{2^{n-1}}$ i $k_{2^{n-1}}$, onda $h_1, h_2, ..., h_{2^{n-1}}, k_{2^{n-1}}, .., k_2, k_1, h_1$ čini Hamiltonov ciklus.