Zavrsni ispit iz Naucnog izračunavanja-septembar 2012.

1. zadatak

(a) Kada je pogodno koristiti Hermiteov interpolacioni polinom za aproksimaciju funkcija?

(b) Na koji način se može izvesti formula za Hermiteov interpolacioni polinom $P_m(x)$ koji aproksimira funkciju $f(x)$ i zadovoljava uslove: $P_m(x_i) = f(x_i)$, $P_m^{'}(x_i) = f^{'}(x_i)$ $P_m^{''}(x_i) = f^{''}(x_i)$u čvorovima interpolacije $x_i, i = 0, 1, 2, ..., n$.

(c) Koji je maksimalni stepen m polinoma pod b)?

2. zadatak

(a) Definisati podeljene razlike funkcije dve promenljive $f(x, y)$ koja je zadata svojim vrednostima $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ na dvodimenzionoj mreži tacaka $\omega = \{(x_i, y_j)|i = 0, 1, ..., n, j = 0, 1, 2, ..., m\}$.

(b) Napisati interpolacioni polinom sa podeljenim razlikama funkcije dve promenljive $f(x, y)$ ako su zadati ulazni podaci dati pod a).

3. zadatak

Na koji način se mogu, korišćenjem polinoma sa podeljenim razlikama funkcije dve promenljive $f(x, y)$, približno izračunati $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x^*, y^*)$, $\frac{\delta^2 f}{\delta^y}(x^*, y^*)$ i $\frac{\delta^2 f}{\delta^2 x}(x^*, y^*)$ u zadatoj tački (x^*, y^*)?

4. zadatak

Odrediti trigonometrijski polinom trećeg stepena najbolje srednjekvadratne aproksimacije funkcije $f(x) = sin^4(x)$ na segmentu $[-\pi, \pi]$ sa težinskom funkcijom $\omega(x) = 1$.

5. zadatak

Dat je Košijev problem:

$$x^{'}(t) = y(t) - t,$$
$$y^{'}(t) = x(t) + sin(y(t)),$$
$$z^{'}(t) = x^2(t)y(t)z(t),$$

sa početnim uslovima:

$$x(0) = -1, y(0) = 0, z(0) = 1$$

a) Konstruisati iterativne nizove x_k, y_k i z_k, $k = 0, 1, 2, ...$ za približno rešavanje datog problema, primenom metode Ojlera. Napomena: $x_k \approx x(t_k)$, $y_k \approx y(t_k)$ i $z_k \approx y(t_k)$, gde je $t_k = kh, h = const, k = 0, 1, 2, ...$

b) Koji je red tačnosti primenjene metode?